GEOMETRÍA RECREATIVA
SEGUNDA PARTE
ENTRE PASO Y BROMA EN GEOMETRÍA

CAPITULO NOVENO
LO ANTIGUO Y NUEVO SOBRE EL CIRCULO

Contenido:

1. Geometría practica de los egipcios y romanos
Cualquier alumno sabe calcular la longitud de una circunferencia dividida por el diámetro, mucho más exacto que un sacerdote de Egipto o un arquitecto de gran Roma. Los egipcios pensaban, que la circunferencia era mas larga que su diámetro en 3,16 veces, los romanos en 3,12, pero la proporción correcta es 3,14159… Los matemáticos egipcios y romanos calcularon la proporción de la longitud sobre su radio, no de un modo geométrico, sino que empíricamente. ¿Pero por qué ellos tuvieron estos errores? ¿No pudieron ceñir a un objeto redondo un hilo y luego, enderezarlo y simplemente medir?
Sin duda que ellos actuaron de esta manera; Pero no tenemos que pensar, que este modo da un buen resultado. Imaginen, por ejemplo, un jarrón con el fondo redondo y el diámetro de 100 mm. Longitud de circunferencia tiene que ser 314 mm. Pero en la práctica, midiendo con hilo, no obtendremos esta longitud: Simplemente un error de un milímetro, y luego π

sería equivalente a 3,13 o 3,15. Además teniendo en cuenta la imposibilidad de medir diámetro de un modo exacto, los errores son inevitables, entonces el valor de π oscila entre

$$\frac{313}{101} \text{ y } \frac{315}{99}$$

es decir, en fracciones decimales entre

3,09 y 3,18.

Uds. ven, que buscando π por el modo dicho, podemos recibir el resultado, no coincidiendo al 3,14: Una vez 3,1, segunda vez 3,12, tercera 3,17 y etc. Causalmente entre ellos aparece el 3,14, pero para contador este numero no tendrá gran significación.
Este camino experimental no pudo dar un resultado aceptable para π. Entonces está claro por qué el mundo antiguo no sabia la proporción correcta de la longitud de circunferencia sobre su diámetro, y necesitaban un genio llamado Arquímedes, para encontrar el valor de π = 3 1/7, sin medición, solamente reflexionando.
Volver

2. "Lo sé y recuerdo perfectamente"
En ,"Algebra" de un matemático árabe Magamed – ben - Musa leemos sobre el cálculo de la longitud de la circunferencia:
"La mejor manera es multiplicar el diámetro por 3 1/7 . Es el modo más fácil y rápido. El Dios sabe mejor."
Ahora sabemos, que el número 3 1/7 del Arquímedes no obstante exacto expresa la proporción de longitud de la circunferencia sobre diámetro. Teóricamente no estaba demostrado, que esta proporción no puede ser expresada por una fracción. Nosotros podemos escribirla aproximadamente, aún superando esta exactitud, respondiendo a las exigencias más estrictas de vida practica. Un matemático del siglo XVI Ludolf de Leuden, tuvo gran paciencia para calcular el número con 35 decimales y su testimonio era grabar encima de su lápida este valor de π[1] (figura 122).
Aquí esta:

3,14159265358979323846264338327950288…

¡Un tal Shenx en el año 1873 obtuvo un valor para π, donde después de coma iban 707 decimales! Estos largos números, expresando el valor de π aproximadamente no tienen valor practico, ni tampoco teórico. Solamente en nuestra época, durante el ocio, pudieron aparecer las ganas de batir récords, superando a Shenx: En los años 1946 – 1947, Ferguson (universidad de Manchester) y Wrench (Washington) calculaban 808 decimales para π y estaban muy contentos porque encontraron errores en los cálculos de Shenx, que comenzaban a partir del decimal número 528.

[1] En aquel tiempo este valor no era utilizado: fue traducido en el siglo XVIII por un académico matemático ruso Leonardo Pavlovich Eyler

Figura 122. Grabación matemática encima la lápida.

Por ejemplo, si deseábamos encontrar longitud de ecuador terrestre con la exactitud de un centímetro, sabiendo su diámetro, sería suficiente usar 9 decimales de π. Cogiendo el doble (18), habíamos podido calcular longitud de la circunferencia, con el radio desde la Tierra hasta el Sol, equivocándonos en no más de 0,0001 mm (¡en 100 veces menores del pelo!).
Muy claramente enseñó la utilidad absoluta del primer centenar de decimales del numero π, el matemático ruso Grave. Había calculando, si imaginamos una esfera, donde el radio es equivalente ala distancia desde la Tierra hasta Sirio, es decir, la cantidad de los kilómetros es equivalente a 132 con diez ceros: 132×10^{10}, llenando a esta esfera con microbios, donde en cada milímetro cubico de esfera hay por mil millones 10^{10} de microbios, luego todos estos microbios se colocan sobre una línea recta así, donde distancia entre cada un microbio era otra vez equivalente a la distancia desde Sirio hasta la Tierra, entonces, teniendo en cuenta este segmento fantástico como diámetro de la circunferencia, era posible calcular longitud de la circunferencia gigantesca así obtenida con una exactitud de 1/1.000.000 mm, utilizando 100 decimales después de coma. Bien anota sobre este asunto un astrónomo francés Arago, "en el sentido práctico, nosotros no habríamos ganado nada, si entre longitud de circunferencia y su diámetro hubiera existido la proporción exacta".
Para cálculos habituales con el número π es necesario recordar dos decimales después de la coma (3,14), para los más exactos, los cuatros decimales (3,1416: en vez de 5 utilizaremos 6, porque luego sigue un decimal superior al 5).
Pequeños poemas o frases divertidas se quedaran en memoria más tiempo, que números. Por eso para recordar mejor el significado numérico de π inventan unos versos o frases

especiales. En estas obras de poesía matemática buscan palabras, donde la cantidad de letras de cada palabra coincide sucesivamente al numero correspondiente del π.
Hay versos en ingles de 13 palabras, por lo tanto dan 12 signos después de coma; en alemán, de 24 palabras, y en francés de 30 palabras[2].
Ellos son curiosos, pero muy grandes y pesados. Entre alumnos de E. Y. Tereskov , el profesor de matemática de una región moscovita, hay una estrofa muy popular en la escuela inventada por el mismo:

Ýòî	ÿ	çíàþ	è	ïîìíþ	ïðåêðàñíî
3	1	4	1	5	9

Una de sus alumnas, Elisa Cherikover inventó una siguiente frase irónica y practica:

Ïè	ìíîãèå	çíàêè	ìíå	ëèøíè,	íàïðàñíû.
2	6	5	3	5	8

El autor de este libro no atreve de inventar algo suyo, pero propone una frase bastante prosaica. “¿Qué yo lo se sobre círculos?”, una pregunta, donde el número 3,1416 esconde la respuesta.
Volver

3. El error de Jack London

El sitio siguiente de la novela de Jack London “ Un dueño pequeño de una gran casa” deja para nosotros unos datos para los cálculos geométricos:

Problema:

“ En el medio del campo hay una pértiga de acero, puesta profundamente a la tierra, Desde la cima hasta el fin del campo viene el cable, fijado por el tractor. Mecánicos aprietan la palanca, y el motor empieza a trabajar.
El vehículo tira para adelante, circunscribiendo el círculo alrededor de la pértiga, como si fuera su centro.
- Para perfeccionar finalmente el vehículo, - dijo Gregen, - os queda convertir la circunferencia, la que circunscribe el vehículo, al cuadrado.

- *Por cierto, en el campo cuadrado de este modo se elimina mucha tierra.*
- *Gregen hizo un par de cálculos, luego dijo:*
- *Se pierde, aproximadamente tres acres de cada diez.*
- *No menos.”*

---

[2] Versos extranjeros:
en ingles:
See I have a rhyme assisting
My feeble brain, its tasks offtimes resisting

en alemán:
Wie o dies ð
Macht ernstlich, so vielen viele Muh’!
Lernt immerhin, Jungltnge, leichte Verselein,
Wie so zum Beispeil dies durfte zu merken sein’

en francés
Que j’aime a faire apprendre un
Nombre utile aux sages!
Jmmortel Archimede, sublime ingenieur,
Qui de ton jugement peut sender la valeur?
Pour moi ton probleme eut de pareils avantages

Proponemos a los lectores comprobar el cálculo.

Solución
El cálculo ha sido erróneo: Se pierde 0,3 de toda la tierra. Pues bien, en realidad, un lado del cuadrado es a. La superficie de este cuadrado es a^2. Diámetro del circulo inscrito es equivalente a, su superficie

$$\frac{\pi a^2}{4}$$

La parte limitada de la plaza cuadrada es:

$$a^2 - \frac{\pi a^2}{4} = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)a^2 = 0{,}22a^2$$

Veamos, que la parte bruta del campo cuadrado esta formado no 30%, como pensaban protagonistas de novela americana, sino 22%.
Volver

4. Lanzamiento de aguja
Un modo original e espontáneo para cálculo de π es el siguiente. Aprovisionando con una aguja corta (de dos centímetros), mejor sin punta, para que aguja sea del mismo espesor, se dibujan en un papel un par de líneas paralelas, separadas una de otra por el doble de la longitud de la aguja. Luego se arroja la aguja de una altura arbitraria sobre el papel y se marca, ha cruzado o no la aguja una de las líneas (figura 123 de la izquierda). Para que la aguja no rebote, se deja por debajo, un papel secante o un paño. Se repite el lanzamiento muchas veces, por ejemplo cien o mejor, mil de veces, marcando cada vez el sitio de intersección[3]. Luego se divide la cantidad total de lanzamientos sobre el número de acontecimientos, cuando la aguja ha caído sobre las rayas, entonces, el resultado será él numero π, por supuesto, mas o menos aproximadamente.

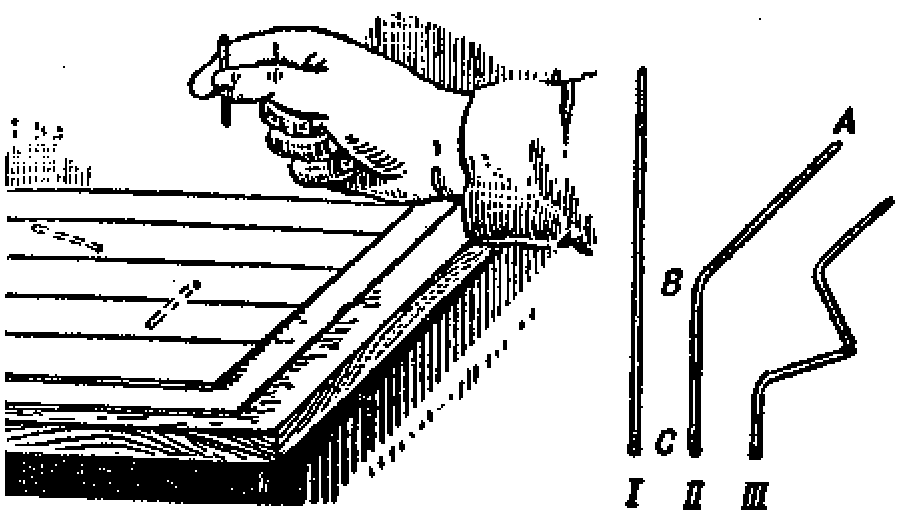


Figura 123. Lanzamiento de aguja. Experimento del Bufón

[3] Intersección era también cuando aguja solamente tocara con el punto a la línea.

Explicaremos por qué el resultado es así. Llamaremos K a la probabilidad de intersección y la longitud de la aguja será 20 mm.
Entonces la cantidad probable de intersecciones de cada milímetro de aguja es K/20 . Para una parte la aguja de 3 mm, será 3K/20 y para una porción de 11 mm será 11K/20 y etc.
Entonces la cantidad probable de intersecciones es directamente proporcional a la longitud de aguja.
Esta proporcionalidad se mantiene aún en el caso que la aguja sea curva. Será mejor si la aguja tiene la forma de la figura II (figura 123 a la derecha), además la parte AB = 11 mm y BC = 9 mm.
Para parte AB la cantidad de intersecciones probables es 11K/20 y para BC es 9K/20 y para la aguja completa será 11K/20 + 9K/20, es decir, como antes es equivalente a K. Podemos doblar la aguja de una manera todavía más ingeniosa (la figura III, figura 123), la cantidad de intersecciones no cambiará.
(Tengan en cuenta, que con una aguja doblada son posibles intersecciones con dos o más partes de la aguja en el mismo momento; Esa intersección la tenemos que calcular como 2, como 3 y etc., porque la primera ha sido tomada cálculos de intersecciones para una parte de aguja, la segunda, para otra y etc.)
Imaginase ahora, que estamos lanzando una aguja en forma del círculo, con diámetro equivalente a la distancia entre las líneas (es el doble mas de nuestra aguja). Este anillo debe cada vez cruzar alguna línea (o tangente a ambas líneas, en todo caso, veremos dos intersecciones). Si la cantidad total de lanzamientos es N, entonces él numero de encuentros es 2N. Nuestra aguja recta es menor de este anillo en tantas veces, en cuantas veces el medio diámetro es menor de la longitud de circunferencia, es decir, en 2π veces. Pero nosotros ya tenemos establecido, que la cantidad probable de intersecciones es proporcional a la longitud de aguja. Por eso el número probable (K) de las intersecciones por nuestra aguja tiene que ser menos de 2N en 2π veces, es decir, equivalente a

$$\frac{N}{\pi}$$

$$\pi = \frac{\text{cantidad de lanzamientos}}{\text{cantidad de intersecciones}}$$

Cuando mayor sea la cantidad de lanzamientos, más exacto será el valor para π. Un astrónomo suizo R. Volf en siglo XIX observó 5000 caídas de aguja sobre el papel rayado y ha obtenido la cantidad de π = 3,159... esta expresión es menos exacta que el número del Arquímedes.
Como vemos, la proporción de longitud de la circunferencia sobre el diámetro aquí buscan siguiendo por el camino practico, además, es curioso, no hace falta dibujar el círculo o diámetro, es decir, no falta el compás. Una persona sin tener ni idea sobre geometría o sobre el círculo, podrá encontrar la cantidad del numero π, si pacientemente hace bastante mayor cantidad de lanzamientos con aguja.
Volver

5. Enderezamiento de circunferencia

Para mayoría de los propósitos prácticos es bastante utilizar para el π un numero 3 1/7 y el largo de la circunferencia equivalente a 3 1/7 veces el diámetro (dividiendo un segmento sobre siete partes es, evidentemente, fácil). Existen otros modos aproximadamente de enderezamiento, utilizados en la practica por carpinteros y etc. No vamos a examinar ahora ellos, sino mostraremos un modo de enderezamiento bastante fácil, el que deja un resultado muy exacto.

Problema

Si necesitamos enderezar la circunferencia O del radio r (figura 124), entonces pasaran el diámetro AB, y en el punto B – una línea perpendicular CD hacia AB. Desde el centro O sobre ángulo de 30 hacia AB pasan la recta OC. Luego en la recta CD desde el punto C dejan los tres radios de esta circunferencia y unen el punto D recibido con A: El segmento AD es equivalente a longitud de la media circunferencia. Si el segmento AD prolongaremos doble, entonces recibiremos la circunferencia O enderezada. El error posible menos de 0,0002r.

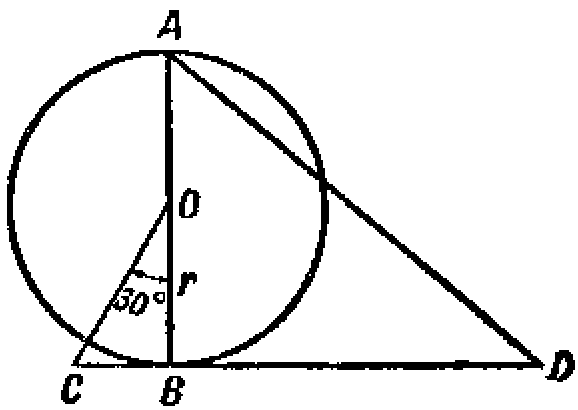


Figura 124. El modo aproximadamente geométrico de enderezamiento de la circunferencia. ¿Cuál es el principio elemental de esta teoría?

Solución

Sobre el teorema de Pitágoras

$$CB^2 + OB^2 = OC^2.$$

Indicando el radio OB otra vez de r y teniendo en cuenta, que CB = OC/2 (como el cateto que está frente del ángulo de 30), obtenemos:

$$CB^2 + r^2 = 4CB^2$$

De donde

Luego en el triángulo ABD

$$BD = CD - CB = 3r - \frac{r\sqrt{3}}{3}$$

$$AD = \sqrt{BD^2 + 4r^2} = \sqrt{\left(3r - \sqrt{\frac{r\sqrt{3}}{3}}\right)^2 + 4r^2} =$$

$$= \sqrt{9r^2 - 2r^2\sqrt{3} + \frac{r^2}{3} + 4r^2} = 3{,}14153\,r$$

Comparando este resultado con aquel que obtuvimos, si cogemos π con la mayor potencia de exactitud (π = 3,141593), vimos, que la diferencia forma solamente 0,00006 m. Si nosotros de esta manera enderezaremos la circunferencia con el radio de 1 m, el error será para media circunferencia solamente 0,00006 m, y para circunferencia total 0,00012 m, o 0,12 mm (es la triple anchura del pelo).

[Volver]

6. Cuadratura del círculo

No puede ser, que ninguno de Uds. no escucharan alguna vez sobre la "cuadratura del círculo", sobre aquella famosa tarea de geometría, con la cual trabajaban matemáticos veinte siglos antes. Estoy seguro, que hay lectores que ellos mismos probaron solucionar esta tarea. Y aun más, lectores que están perplejos de la dificultad de esta tarea clásica e insoluble. La mayoría acostumbrados de repetir lo mismo, que la tarea sobre la cuadratura del círculo es irresoluble, no sabiendo nada de la naturaleza de este problema, ni nada sobre dificultad de la solución.

La Matemática tiene muchas tareas todavía más curiosas como teórica y prácticamente de la cuadratura del circulo. Pero ninguna ha tenido tanto popularidad como esta; durante siglos han trabajado sobre ella profesionales, matemáticos y aficionados.

"Encontrar la cuadratura del circulo", es entonces, dibujar un cuadrado cuya superficie sea equivalente a la de un círculo dado. Prácticamente esta tarea aparece a menudo, pero tal vez se soluciona prácticamente. La tarea famosa pide, para que el figura sea totalmente correcta, construirlo con la ayuda de dos tipos de operaciones técnico – lineales:

1. Circunscribir la circunferencia alrededor de un punto
2. Pasar la línea recta a través de dos puntos.

O sea, necesita hacer la figura, utilizando solamente dos instrumentos: compás y regla.

Entre los matemáticos hay mayor extensión de opinión, que la dificultad condicionada por aquello, que la proporción de la longitud de la circunferencia sobre el diámetro (el famoso numero π) no puede ser expresado por una cantidad determinada de dígitos. Es cierto en tanto que solución de esta tarea depende de la naturaleza especial del numero π. En realidad: Transformación del rectángulo al cuadrado con la misma superficie es una tarea fácil y rápida de solucionar. Para el problema de cuadratura del circulo tiene su expresión en la construcción, por el compás y regla, de un rectángulo isométrico al círculo. De la fórmula de la superficie de una circunferencia $S = \pi r^2$, o (que es lo mismo) $S = \pi r \times \pi r$, evidentemente, superficie del circulo es equivalente a la superficie de este rectángulo, donde uno de los lados es r, otro en π veces más. Entonces se trata de dibujar un segmento, el que en π veces será mas largo del dado. Se sabe, π no es exactamente equivalente a 3 1/7, ni 3,14, ni tampoco 3, 14159. La serie de los números se lleva hasta el infinito.

Esta característica del numero π, su irracionalidad[4] fue examinada en el siglo XVIII por los matemáticos Lamber y Lejandro. Sin embargo, conocimientos de irracionalidad de π no habían parado a los esfuerzos de los" cuadroturistas" de matemática. Ellos sabían, que la irracionalidad por si misma no hacía la tarea desesperada. Existen cantidades irracionales, las que geometría sabe "construir" perfectamente. Si necesito dibujar un segmento, que sea más largo del dado en $\sqrt{2}$ veces. El número $\sqrt{2}$, como π, son irracionales. Sin embargo, no es nada tan fácil, que dibujar el segmento buscado: Recordaremos, $a\sqrt{2}$ es el lado del cuadrado inscrito en el circulo con el radio a. Cualquier alumno hará la construcción del Cualquier alumno hará la construcción del segmento $a\sqrt{3}$ (lado del triángulo inscrito equilátero). No hay grandes dificultades con la construcción de una expresión irracional (de primera vista tan complicada)

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\sqrt{2}$$

porque la tiene su expresión en la construcción de 64 – rinconera.

[4] La característica del numero π es, que el no puede ser expresado por una fracción justa.

Como vemos, multiplicador irracional, estado en la expresión, no siempre lo hace esta expresión imposible para construir con el compás y la regla. La insolubilidad de cuadratura del circulo se esconda no totalmente en el π - irracional, sino dentro de otra característica de este numero. Precisamente, la cantidad π - no es algebraica, es decir no podemos recibir por la solución de una ecuación con coeficiente racional. Estos números llaman "trascendental"
El matemático de siglo XVI el Viet demostró, que el numero

$$\frac{p}{4} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}} \ldots}$$

Esta expresión para π soluciona la tarea de la cuadratura del círculo, si la cantidad de las operaciones entre su serie finita (después esta expresión podrá ser construida geométricamente). Pero como cantidad de expresiones de raíces cuadradas en este caso es infinita, entonces la fórmula de Viet no ayuda.
Pues el motivo de la insolubilidad de la tarea sobre cuadratura del circulo es el transcendentalismo del número π, es decir no se podrá solucionar la ecuación con coeficientes racionales. Esta característica del numero π ha sido examinada por el matemático alemán Lindeman en año 1889. En el fondo este científico es la única persona que ha solucionado la cuadratura del circulo, a pesar que la solución es, afirma, de construcción imposible. Por lo tanto, en año 1889 se terminan esfuerzos seculares de los matemáticos en este sentido; pero, por desgracia, no terminan los ensayos inútiles de los aficionados, que conocen insuficientemente el problema.
Lo anterior se deduce de la teoría, pero, ¿qué pasa con la práctica? Pues ella no necesita una resolución justa de esta tarea famosa. La opinión de mayoría, es una resolución sobre el problema de cuadratura del circulo, quizás tendría gran significación para la vida practica si se tiene una equivocación profunda. Para las necesidades habituales es suficiente tener a disposición los modos aproximados de solución.
Las averiguaciones prácticas de la cuadratura del círculo han sido inútiles desde aquel tiempo, cuando se tenían los primeros 7 u 8 números exactos de π. Para necesidades de vida practica es suficiente saber, que π = 3,1415926. Ninguna medición de longitud puede dar un resultado expresado por mas de siete cifras significativas. Por eso, tomar para π mas de ocho cifras decimales, es inútil: la exactitud del cálculo no se mejorará[5].
Si el radio está expresado por siete números significativos, entonces la longitud de la circunferencia no tendrá mas de siete números, aunque cojamos para las primeras cien cifras significativas.
En aquello, que los matemáticos antiguos lo hicieron con gran trabajo para obtener las cifras significativas más largas, no tiene ninguna importancia práctica. Además la significación científica de esta obra es inútil. Sencillamente se trata de paciencia. Si Uds. tienen ganas y mucho tiempo ocioso, podrán encontrar 1000 signos para π, utilizando la serie siguiente infinita, encontrada por el Leibniz[6]

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \ldots$$

Un astrónomo, citado anteriormente, Argo, tiene escrito lo siguiente:
"Buscadores de cuadratura del circulo siguen dedicando el tiempo al solucionar la tarea, imposibilidad de la cual ahora esta examinada positivo y la cual, si por acaso pudiera realizarse, no traería ningún interés practico. No hace falta ocupándonos sobre este asunto:

[5] Ver" Aritmética recreativa" Y. I. Perelman.
[6] Pero esto será un ejercicio aritmético inútil, ni siquiera un poco avanzado para la solución de la tarea famosa.

Los enfermos de cerebro hagan todo lo posible para descubrir la cuadratura del circulo, pero por desgracia no tiene ningún sentido. Esta enfermedad mental existe de la antigüedad."
Y termina irónicamente:
"Las academias de todos países, enfrentándose contra los buscadores de cuadratura, anotaban un fenómeno, que la enfermedad, habitualmente, progresa en la primavera."
Volver

7. Triángulo de Bingo
Examinaremos una de las soluciones aproximadas del problema sobre cuadratura del circulo, muy cómoda para las necesidades practicas de la vida.
El modo consiste en que se calcula (figura 125) el ángulo a, bajo de cual deberemos pasar hacia diámetro AB a la cuerda AC = x, era el lado del cuadrado buscado. Para saber el valor de este ángulo, tenemos que pedir ayuda a la trigonometría:

$$\cos a = \frac{AC}{AB} = \frac{x}{2r}$$

donde r es el radio del circulo.

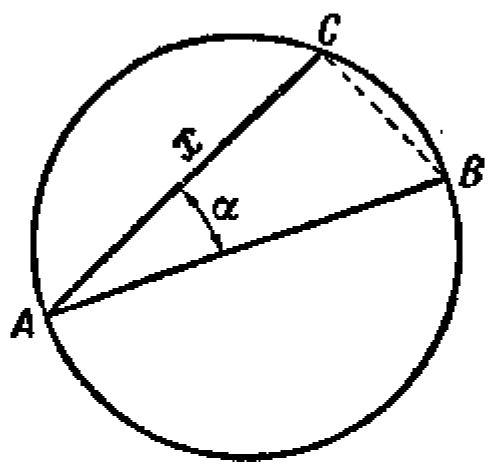


Figura 125. Un modo de ingeniero ruso del Bingo (1836)

Entonces, un lado del cuadrado buscado $x = 2r \times \cos a$, su superficie es $4r^2 \times \cos^2 a$. Por otro lado, la superficie del cuadrado πr^2 es la superficie del circulo correspondiente. De aquí se deduce,

$$4r^2 \times \cos^2 a = \pi r^2$$

de donde

$$\cos^2 a = \sqrt{\frac{\pi}{4}}; \ \cos a = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 0{,}886.$$

En las tablas encontramos:

$$a = 27°36'.$$

Entonces, pasando en el mismo circulo la cuerda bajo de 27°36′ sobre el diámetro, inmediatamente obtenemos un lado del cuadrado, la superficie del cual es equivalente a la

superficie del circulo. Prácticamente se hacen así: preparan el triángulo técnico[7], donde uno de los ángulos agudos es de 27° 36′ (el otro 62° 24′). Teniendo a su disposición este triángulo, podemos, para cada un circulo, encontrar un lado del cuadrado isométrico.
Para personas quienes deseen preparar este triángulo técnico son útiles las indicaciones siguientes.
Como la tangente de 27°36′ es equivalente a 0,523, o 23/44, entonces los catetos de este triángulo están en la proporción de 23/44. Por eso, preparando el triángulo, uno de los catetos, por ejemplo, es de 22 cm, y el otro 11,5 cm, nosotros vamos a tener todo lo que necesitamos. Esta claro, que podemos utilizar este triángulo como otro cualquiera.
Volver

8. La cabeza y los pies

Parece, que uno de los protagonistas de Julio Verne calculaba, cuál parte de su cuerpo había pasado un camino mas largo durante el tiempo de los cruceros alrededor del mundo, la cabeza o los pies. Esta tarea es más instructiva, si preguntamos de otra manera. Nosotros la proponemos en otro aspecto.

***Problema**.*

Imagínense que Uds. han cruzado el mundo a lo largo de ecuador. ¿En cuánto la cima de la cabeza pasara el camino mas largo, que la punta del pie?

Solución

Los pies recorrieron un camino $2\pi R$, donde R es el radio del globo terrestre. La cima de cabeza andaba sobre esto $2\pi (R + 1,7)$, donde 1,7m es la estatura del cuerpo humano. La diferencia de los caminos es $2\pi (R + 1,7) - 2\pi R = 2\pi \times 1,7 = 10,7$m. Entonces, la cabeza había recorrido un camino en 10,7 m mayor, que los pies.
Es curioso, que en la respuesta final no entra el radio de la Tierra. Por eso el resultado sale lo mismo en la Tierra, como en Júpiter, u otro planeta pequeño. En general, la diferencia de longitudes de dos circunferencias concéntricas no depende de sus radios, solamente de las distancia entre ellos. Adición de un centímetro del radio de la órbita terrestre aumentará su longitud en tantas veces, en cuantas prolonga esa adición al radio de una simple moneda.
Más sobre esta paradoja geométrica se encuentra en uno de los manuales de distracciones geométricas.

***Problema**.*

¿Si se pone sobre el ecuador terrestre un hilo metálico y luego se le añade un metro, entonces, podrá pasar un ratón entre alambre y tierra?

Solución.

Normalmente contestan, que el espacio era mas estrecho que un pelo: ¡Qué significa un metro comparando con 40 millones de metros de ecuador terrestre! En realidad el espacio es

$$\frac{100}{2\pi}\text{ cm} \approx 16\text{ cm}$$

No solo un ratón, sino también el gato podrá pasar por este espacio.
Volver

9. Alambre a lo largo de ecuador

[7] Este modo cómodo había sido propuesto en año 1836 por un ingeniero ruso de apellido Bingo; el triángulo tiene el nombre del inventor - “triángulo de Bingo”.

Problema.
Ahora imagínense, que el globo terrestre esta cubierto fuertemente por un hilo metálico a lo largo de ecuador. ¿Qué sucederá, si el hilo se enfría en 1°C? ¿Considerando que no se rompe o no se estira, entonces, cuanto se hunde dentro de la tierra?

Solución.
Parece, que no es tan importante la bajada de temperatura solamente de 1°C, no podrá provocar hundimiento profundo del alambre en la tierra. Los cálculos dicen lo siguiente. Enfriándose en 1°C, el hilo metálico reduce un cien mil parte de toda su longitud. Con longitud de 40 millones de metros (es la longitud de ecuador) el hilo tiene que reducirse, como es fácil de calcular, sobre 400m. Pero el radio de esta circunferencia metálica se reduzca no en 400 metros, sino mucho mas menos. Para saber, en cuantas veces disminuye el radio, debemos dividir 400 m sobre 6,28, es decir sobre 2π. Obtendremos como 64 metros. Entonces el hilo enfriándose en 1°C, tendría sobre estas circunstancias que hundirse en la tierra no en par de centímetros, ¡sino más que en 60 metros!
Volver

10. Acción y cálculo
Problema
Enfrente de Uds. hay ocho círculos iguales (figura 126). Los siete pintados – son inmóviles, octavo (claro) corre encima de ellos sin deslizarse. ¿Cuántas vueltas darie el, dando una vuelta alrededor de los círculos inmóviles?

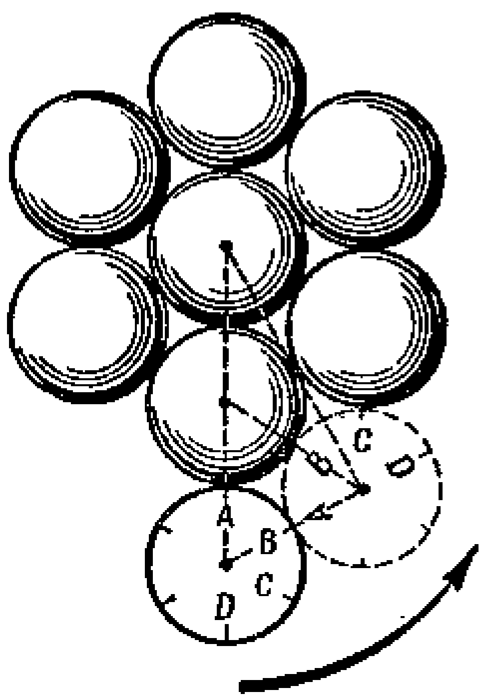


Figura 126. ¿Cuántas vueltas hará el circulo claro, dando un giro alrededor de otros siete?

Uds. ahora mismo podrán comprobar en la practica: Poniendo encima de la mesa ocho monedas del mismo tamaño, colocando como se indica el figura y fijando las siete monedas sobre la mesa, dejando moneda octava hacer una vuelta. Para saber la cantidad de vueltas fíjense, por ejemplo, a la postura del numero encima de moneda. Cuando el numero se vuelva a ponerse en la postura principal, la moneda habrá dado un giro alrededor de su centro.

Hagan la prueba en realidad, no imaginándola, y verán, que la moneda hará solo cuatro vueltas.
Ahora vamos a probar de obtener la misma respuesta con ayuda de reflexión y cálculos. Vamos a encontrar, por ejemplo, el que arco circunscribe el circulo corriente encima del circulo inmóvil. Con esta razón imaginaremos movimiento del circulo corriente desde la “colina” A en la “valleja”(quebrada) próxima entre dos círculos inmóviles (figura 126 la raya discontinua).
Sobre la figura no es tan difícil de establecer, que el arco AB, sobre el que corría el circulo, sea de 60°. En la circunferencia de cada circulo inmóvil aquellos arcos son dos; Juntos ellos forman el arco de 120° ó 1/3 de circunferencia.
Por lo tanto, el circulo corriendo haga 1/3 de vuelta, dejando 1/3 de cada uno circulo inmóvil.
Todos juntos los seis círculos inmóviles; Pues la respuesta es: el círculo móvil hace solamente $1/3 \times 6 = 2$ vueltas.
¡Pues estamos con los diferentes resultados de observación! Pero “la acción es cosa caprichosa”. Si la observación no confirma el calculo, entonces hay dentro del cálculo un defecto.
Uds. tendrán que encontrar el defecto en los siguientes razonamientos.

Solución.
Es que pasa, cuando el circulo corre sin deslizamiento sobre el segmento recto con ½ de longitud de la circunferencia del circulo corriente, entonces en realidad hace ½ vuelta alrededor de su centro. Esta aprobación parece injusta, no corresponda a realidad, cuando el circulo corre sobre el arco de alguna línea curva. En la tarea examinada el circulo corriente, recorriendo el arco, formado, por ejemplo, 1/3 longitud de su circunferencia, hace no 1/2 vuelta, sino 2/3 vueltas y por lo tanto, recorriendo a los seis arcos harán

$$6 \times 2/3 = 4 \text{ vueltas!}$$

Podemos asegurarnos observándola. La raya punteada en el figura 126 refleja esa posición del circulo corriente después de que él recorrió sobre el arco AB (=60°) del circulo inmóvil, es decir, sobre el arco formado por 1/6 longitud de la circunferencia. En la nueva posición del circulo el sitio mas alto sobre su circunferencia ocupa ahora no el punto A, sino el punto C, como vemos corresponda al giro de los puntos de circunferencia sobre 120°, es decir, sobre ½ de vuelta completa. Al “camino” de 120° corresponda 2/3 de vuelta completa del circulo corriente.
Entonces, si el circulo corre sobre una línea curva, el hará otra cantidad de vueltas, que cuando el corre sobre un camino recto de la misma longitud.

* * *

Nos detendremos un poco sobre la parte geométrica de este fenómeno curioso, además, la explicación habitual no siempre es segura.
Sea el circulo con radio r que corre sobre la recta. El hace una vuelta sobre el segmento AB, longitud de cual es equivalente a la longitud de circunferencia del circulo corriente ($2\pi r$).
Doblaremos el segmento AB por la mitad (figura 127) y daremos la vuelta con CB sobre ángulo α proporcionalmente a la postura principal.

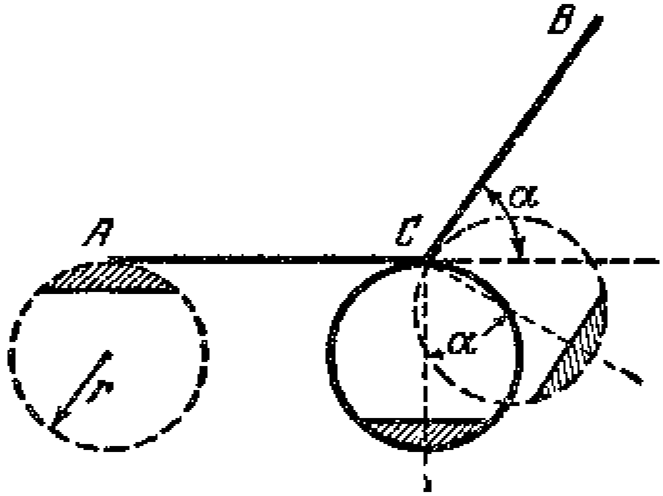


Figura 127. Como aparece la vuelta suplementaria con la ida del circulo sobre la línea curva.

Ahora, cuando el circulo esta haciendo media vuelta, alcanza a la cima C y, para mantener esta postura, sobre cual el iba a tocar en el punto C a la recta CB, girar junto con su centro sobre el ángulo, equivalente a α (estos ángulos son iguales, porque tienen mutuamente los lados perpendiculares).
Durante el giro el circulo corre sobre el segmento. Esto es que produce aquí la parte suplementaria de la vuelta completa comparando con el giro sobre la recta.
La curva suplementaria forma aquella parte de la vuelta completa, cual esta formando el ángulo α desde el ángulo 2π, es decir, media vuelta, entonces, en total con el movimiento sobre la línea quebrada ACB él hará $1 + \alpha/2\pi$ vueltas.
Ahora no es difícil de imaginar, cuantas vueltas tiene que hacer el circulo, corriendo por la parte exterior del hexágono (figura 128).

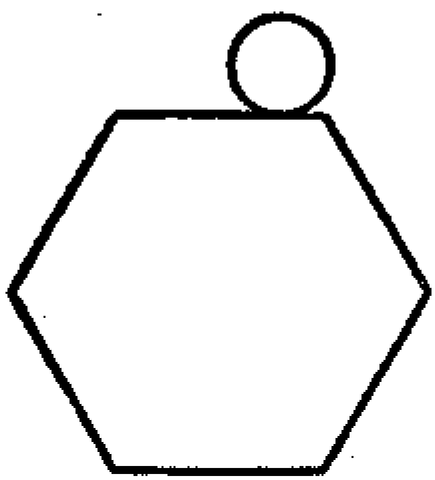


Figura 128. ¿En cuantas vueltas mas haré el circulo, si el correrá encima de los lados del polígono, pero no sobre su perímetro enderezado?

Evidentemente tanto, cuantas veces él dará vueltas sobre el camino recto, equivalente al perímetro (suma de los lados) del hexágono, plus la cantidad de vueltas, equivalente a la suma de los ángulos exteriores del hexágono, dividida por 2π. Como la suma de los ángulos exteriores de cualquier polígono convexo es justa e equivalente a 4d, o 2π, entonces $2\pi/2\pi = 1$.

De este modo, rodeando al hexágono y también cualquier polígono convexo, el circulo siempre hará con una vuelta mas, que con movimiento sobre el segmento recto, equivalente al perímetro del polígono.
Duplicación infinita a los lados del polígono convexo y justo esta acercándose a la circunferencia, significa, todas las consideraciones dichos tienen la misma importancia para circunferencia. Sí, por ejemplo, de acuerdo con el problema principal un circulo corre sobre el arco de 120° equivalente a su circulo, entonces, la confirmación, que el circulo movido hace no 1/3, sino 2/3 de vueltas, tendrá la claridad geométrica completa.

Volver

11. Chica encima de una cuerda

Cuando circulo corre encima de una línea, estado con el en mismo plano, entonces el cada punto del circulo se mueve sobre el plano, es decir, tiene su trayecto.

Figura 129. Cicloide – el trayecto del punto A del disco, corriendo sin deslizamiento sobre la rectilínea.

Fíjense en la trayectoria de cualquier punto del circulo, corriendo encima de una línea o encima de una circunferencia, y Uds. podrán ver curvas distintas.
Algunas de ellas estas reflejadas en los figuras 129 e 130.
Surge una pregunta: ¿Podrá un punto del circulo, corriendo por la "parte inferior" de la circunferencia de otro circulo(figura 130), inscribiendo no línea curva, sino la recta? En primer lugar parece imposible.
Sin embargo esta construcción la vi por mis propios ojos. Ha sido un juguete "la chica en la cuerda"(figura 131). Uds. podrán prepararlo también sin ninguna dificultad. En un trozo de cartón dibujan un circulo con diámetro de 30 cm, dejando el campo en el papel, y uno de los diámetros prolongan por ambas partes.

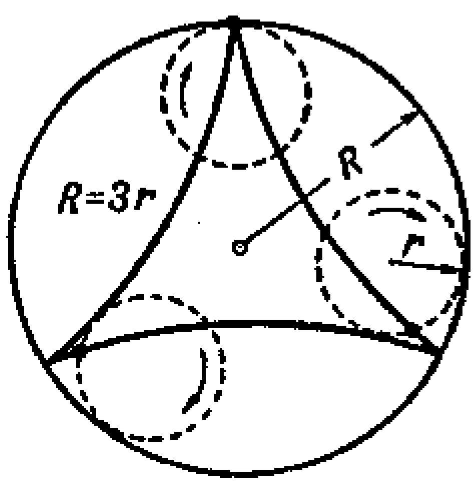


Figura 130. Hipocicloide, el trayecto del punto de la circunferencia del disco, corriendo por el dentro de gran circunferencia, además R = 3r.

Sobre el diámetro prolongado por ambas partes colocaremos agujas con hilo, estirando al horizontalmente y ambas sus fines fijar encima del cartón. El circulo dibujado se cortara y dentro de ventanilla creada ponen un circulo también de cartón con diámetro de 15cm.
Sobre el borde del circulo pequeño colocan una aguja, como en el figura 131, cortan del papel la figura de la chica y se pegan por la pierna sobre cabeza de aguja.
Ahora prueban a rodar el circulo menor, ajustándose al borde de la ventanilla; La cabeza de aguja, junto con ella figura de chica van a deslizarse hacia delante, y detrás a lo largo del hilo tirante.

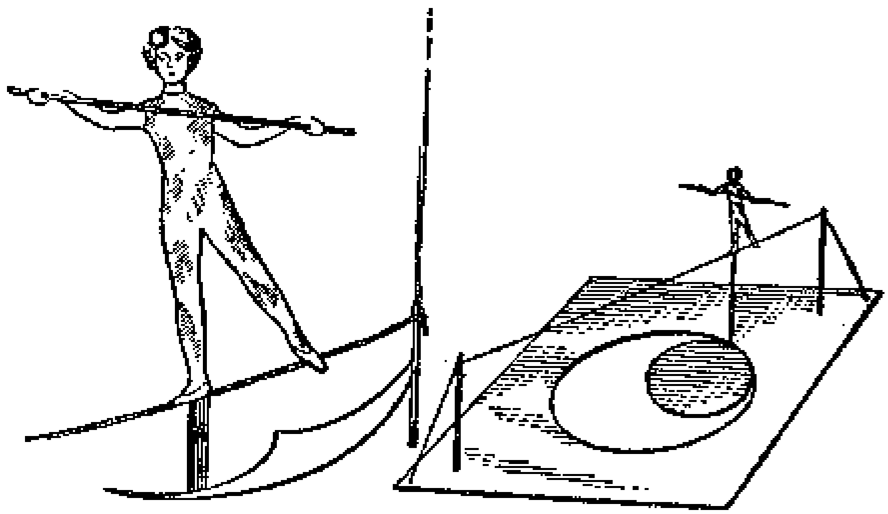


Figura 131. “La chica en la cuerda”. En el circulo corriente hay unos puntos, los cuales se mueven rectamente.

Esto se explica solo, porque el punto del circulo corriente, donde esta fijada la aguja, se mueve justamente a lo largo del diámetro de ventanilla
¿Pero por qué en el caso análogo, reflejando en la figura 130, el punto del círculo corriente inscribe no la recta, sino la línea curva (se llama hipocicloide)? Todo depende de la proporción sobre los diámetros de ambos círculos.

Problema

Demostrar, que si dentro de un circulo mayor corre un circulo doble menor de su diámetro, entonces durante este movimiento cualquier punto sobre circunferencia del circulo menor se moverá sobre rectilínea, la cual es el diámetro del circulo mayor.

Solución.

Si el diámetro del circulo O_1 el doble menor del diámetro del circulo O (figura 132), entonces en cualquier momento de movimiento del circulo O_1, uno de su punto esta en el centro del circulo O.

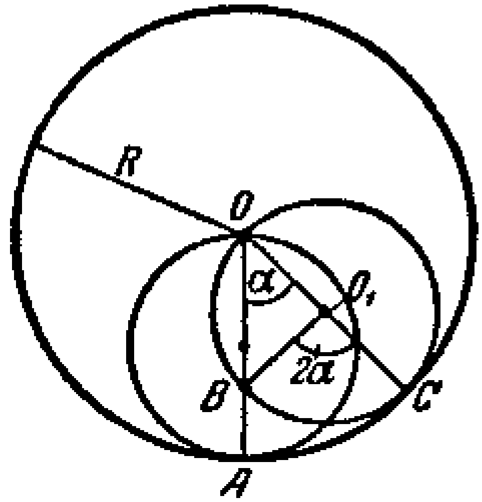


Figura 132. Explicación geométrica " la chica en la cuerda"

Observaremos el movimiento del punto A. Sea el circulo menor que se ha recorrido sobre arco AC.
¿Dónde se encontrará el punto A en el nuevo estado del circulo O_1?
Evidentemente que debe encontrarse en tal punto B de su circunferencia, para que los arcos AB y BC sean iguales de longitud (circulo se corre sin deslizarse).
Sea OA = R y $\angle AOC = \alpha$.
Luego AC = $R\alpha$; por lo tanto, BC = $R\alpha$, pero como $O_1C = R/2$, entonces

$$\angle BO_1C = R \times \alpha / (R/2) = 2\alpha;$$

Luego $\angle$ BOC como inscrito es $2\alpha / 2 = \alpha$, es decir, el punto B se ha quedado en la recta OA.
El juguete descrito aquí representa por si mismo un mecanismo primitivo para transformación del movimiento giratorio rectilíneo.
La construcción de estos mecanismos (se llaman inversores) interesa a los técnicos – mecánicos desde el tiempo de primer inventor ruso de la maquina de vapor – I. I. Polzunov. Normalmente estos mecanismos, transmiten al punto el movimiento rectilíneo, tienen estructura de charnelas.
Una valiosa aportación en la matemática de los mecanismos hizo el matemático ruso P.L. Chebyshev (1821 – 1894) (figura 133). El era no solo un matemático generoso, sino también gran mecánico. Construyó un modelo de la silla "cicleta", inventó el mejor mecanismo contable de aquel tiempo – aritmómetro y etc.

Figura 133 P. L. Chebyshev (1821 – 1894)

Volver

12. Un vuelo a través del Polo

Uds. evidentemente, se acuerdan de un vuelo del famoso M M. Gromov y sus compañeros desde Moscú a San Jacinto a través del Polo norte, cuando durante 62 horas 17 min. de vuelo han sido conquistados dos marcas mundiales de un vuelo sin aterrizaje sobre una línea recta (10.200 km) y sobre la curva (11.500 km).

¿Cómo piensan Uds, será posible que el avión de los héroes dio la vuelta alrededor del eje terrestre junto con la Tierra, y además cruzando el Polo? Esta pregunta se escucha a menudo, pero no siempre nos dan la respuesta correcta. Cualquier avión, también aquel, que cruzó el Polo, sin duda alguna tendrá que tomar parte de la vuelta del globo terrestre. Esto aparece, por que el avión volando esta solamente separado con la litosfera, pero se queda en atmósfera y lleva tras si en el movimiento alrededor del eje de nuestro planeta. Entonces, haciendo el vuelo desde Moscú hasta Norteamérica, el avión en el mismo tiempo giraba junto con la Tierra alrededor de su eje. ¿Cuál es el trayecto de este vuelo?

Para contestar correctamente, debemos que tener en cuenta que cuando digamos “el cuerpo se mueve”, es decir, se cambia de postura del cuerpo con respecto de otros. La pregunta sobre el camino y en general sobre el movimiento no tendría sentido, si no está indicado, como dicen matemáticos, el sistema de referencia, o sencillamente, un cuerpo, respecto al cual aparece el movimiento.

Relativo a la Tierra el avión de M M. Gromov se ha movido casi a lo largo de meridiano Moscú, como cualquier otro, giró junto con la Tierra alrededor de su eje, manteniendo la línea de meridiano durante todo el vuelo; pero sobre la forma del camino para un observador de la Tierra este movimiento no se refleja, porque en este momento se aparece en relación con otro cualquier cuerpo, no sobre la Tierra.

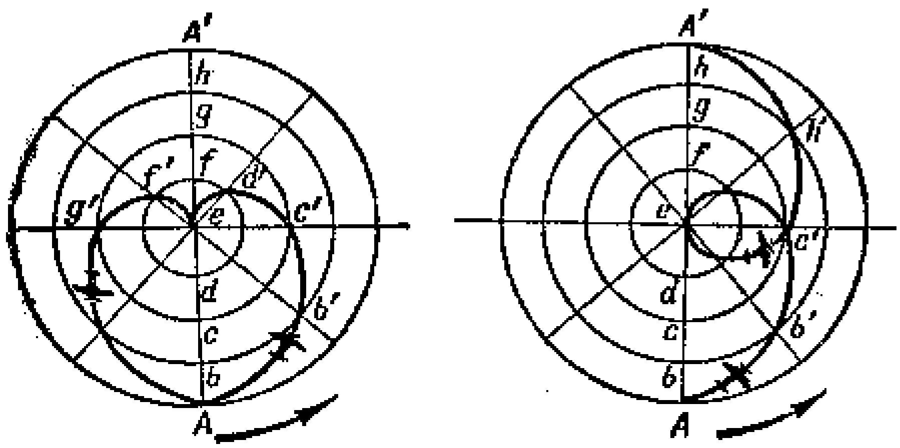
Por lo tanto, para nosotros, estando en la Tierra, el camino de este vuelo a través del Polo, es el arco de un gran círculo, si tener en cuenta, que el avión se ha movido justamente sobre el meridiano y siempre sobre el mismo trayecto desde el centro de la Tierra.

Ahora preguntaremos de otra manera: tenemos el movimiento del avión con respecto a la Tierra y sabemos, que el avión con la Tierra junto giran alrededor de eje terrestre, es decir,

tenemos el movimiento de avión y de la Tierra con respecto de un tal tercer cuerpo; ¿Cuál es el camino de vuelo para el observador, en relación con este tercer cuerpo?
Vamos a facilitar la tarea. La región polar de nuestro planeta la imaginaremos como un disco plano, cuya superficie se sitúa perpendicularmente al eje terrestre. Sea esta superficie imaginaria aquel "cuerpo" respecto al cual se mueve el disco alrededor del eje terrestre, y a lo largo de un diámetro del disco regularmente corre una carreta mecánica: La imagen del avión, volando a lo largo de meridiano a través del Polo. ¿Qué línea del camino va a presentar nuestra carreta en la superficie (mejor dicho, por un punto de la carreta, de su centro de gravedad)?
El tiempo, durante cual ella recorre desde un extremo del diámetro hasta otro, dependerá de su velocidad.
Vamos a ver tres casos:

1. La carreta recorre su camino durante 12 horas;
2. El mismo camino recorre durante 24 horas y
3. Recorre durante 48 horas.

En cualquier caso el disco haga una vuelta durante 24 horas.



Figuras 134 – 135 Las curvas, las cuales inscribe un punto sobre una superficie inmóvil, participando durante dos movimientos.

Primer caso (figura 134). La carreta recorre el diámetro del disco durante 12 horas. El disco hará durante este tiempo media vuelta, es decir dará vuelta de 180°, los puntos A y A′ se intercambiaran a los sitios. En el figura 134 el diámetro esta dividido en ocho partes iguales, cada una de ellas, la carreta las recorre durante 12 / 8 = 1,5 hora.
Observaremos dónde va estar la carreta después de 1,5 hora de empezar la movida. Si el disco no da vueltas, la carreta, saliendo del punto A, alcanzo el punto b durante 1,5 hora. Pero el disco se gira y durante 1,5 hora seguirá sobre 180° / 8 = 45°. Por esto el punto b del disco se trasladará al punto b′. Un observador, estado en el mismo disco y dando vuelta junto con él no notará su giro y vería, que la carreta cambia el sitio desde el punto A al punto b. Pero observador, el que se encuentra fuera del disco y no participa en su giro, notara otra cosa: La carreta se movió sobre una línea curva desde el punto A al punto b′. A través de otra 1,5 hora el observador, estado fuera del disco, se veía la carreta en el punto c′. A lo largo de otra 1,5 hora la carreta se moverá sobre el arco c′d′, luego de otra 1,5 hora alcanzara el centro e.
Siguiendo observando el movimiento de la carreta, el observador que está afuera del disco, notará algo inexpresable: la carreta inscribirá la curva ef′gf′ A, y el movimiento, extrañamente, se terminará no en el punto opuesto de diámetro, sino en el punto principal.

La clave de este enigma es siguiente: Durante seis horas de viaje sobre la otra mitad del diámetro el radio consigue dar vuelta junto con el disco sobre 180° y tomar la posición de primera mitad del diámetro. La carreta se gira con el disco también en aquel momento, cuando pasa por encima de su centro. Toda carreta no podrá entrar en el centro; ella se une con el centro solamente con un solo punto y en un momento dado él se gira junto con el disco alrededor de este punto. Lo mismo tiene que pasar con un avión en este momento, cuando vuela por encima del Polo. Entonces el camino de la carreta sobre el diámetro del disco desde un punto final hasta otro para dos distintos observadores se presentaran las formas distintas del camino. Aquel, quien esta encima del disco y gira junto con él, ese camino aparece como una línea recta. Pero para el observador inmóvil, no estado encima del disco, vería el movimiento de la carreta sobre una curva, reflejada en el figura 134 y recordara el contorno del corazón.
La misma curva la podrá ver cualquiera de Uds., observándola desde el centro de la Tierra el vuelo de avión con respecto de superficie imaginario, perpendicularmente al eje terrestre, con una condición fantástica, que la Tierra sea transparente, Ud. y la superficie no participan en el giro de la Tierra, y si el vuelo a través del Polo duraba 12 horas.
Aquí tiene un ejemplo curioso sumando las dos movidas.
En realidad el vuelo a través del Polo desde Moscú hasta el punto apuesto diametralmente del mismo paralelo duraba 12 horas, por eso quedaremos examinando otra tarea en el mismo sentido.

Segundo caso (figura 135). La carreta recorrerá el diámetro durante 24 horas. Durante este tiempo el disco cumple la vuelta completa, y por lo tanto para un observador inmóvil proporcionalmente al disco, el camino va a tener la forma de una curva, reflejada en el figura 135.

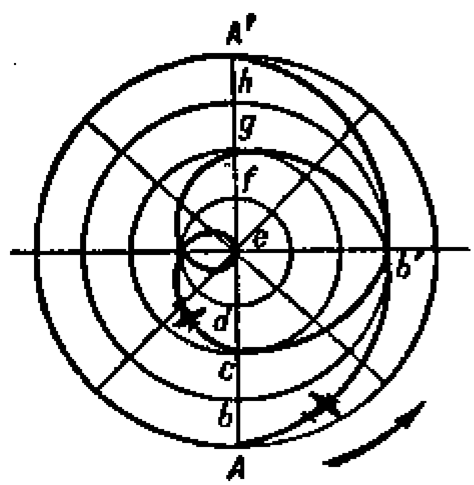


Figura 136. Una línea más curva saliendo en resultado al sumar dos movidas.

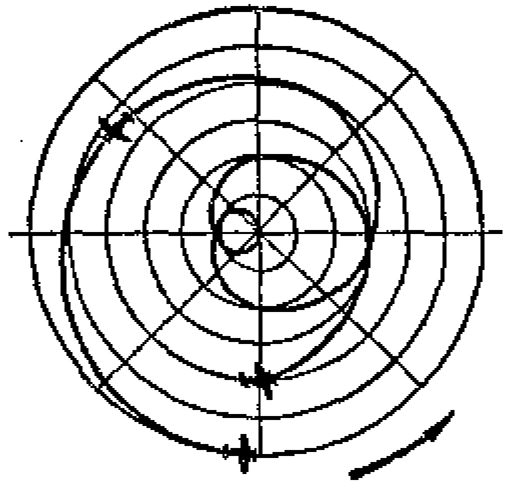


Figura 137. El camino Moscú – San Jacinto como iba a presentarse para observador, sin Participando en vuelo, ni tampoco en giro de Tierra.

Tercer caso (figura 136) El disco como de antes cumple el giro completo durante 24 horas, pero la carreta viaja sobre el diámetro desde el fin hasta el fin durante 48 horas.
En este caso 1/8 de diámetro la carreta recorre durante 48 : 8 = 6 horas.
Durante aquellas seis horas el disco dará la cuarta de su vuelta completa, de 90°. Por eso después de seis horas desde el principio de movimiento la carreta se trasladará sobre el diámetro (figura 136) en el punto b, pero el giro del disco trasladare ese punto en el punto b′. Después de otras seis horas la carreta pasara en el punto g y etc. Durante 48 horas la carreta recorrerá todo el diámetro, y el disco hace dos vueltas completas. En vez de sumar estos dos movimientos para un observador inmóvil el camino le aparece como una curva recreativa, reflejada en el figura 136 por la línea continua.
Viendo este caso nosotros estamos acercándose a los verdaderos condiciones del vuelo a través del Polo. El vuelo duró desde Moscú hasta el Polo, aproximadamente, 24 horas; por ese observador, estando en el centro de la Tierra, se vería esta parte del camino como una línea, casi parecida a la primera mitad de la línea curva (figura 136). Que depende de otra parte del vuelo de M. M. Gromov, pues, ella duraba un y medio veces mas, además, el trayecto desde el Polo hasta San Jacinto también es una y media veces mas larga, que la distancia desde Moscú hasta el Polo Norte. Por eso el camino se representará por la misma línea curva, únicamente en un y medio veces mas larga.
La mayoría de Uds., posiblemente, le confunda el obstáculo, donde el punto principal y final figura se refleja como los vecinos cercanos.
Pero no tenemos que perder de vista, que la figura le indica posición no simultáneamente de Moscú y San Jacinto, sino separado por el lapso de 2 ½ del periodo de veinte cuatro horas.
Pues así ha tenido la forma un camino por el Polo Norte, si podemos observar el vuelo, por ejemplo, desde el centro de la Tierra. ¿Pero si tenemos derecho de llamar este bucle difícil como un camino verdadero a través del Polo en diferencia de relativo, reflejado en las cartas? No, ese movimiento también es relativo: El movimiento esta relacionando con un tal cuerpo, el que no participa en el giro de la Tierra alrededor de su eje, lo mismo que el figura del camino relativo a la superficie de la Tierra giratoria.
Si nosotros podemos observar el mismo vuelo desde la Luna o del Sol, el camino del vuelo tendría otro aspecto.
La Luna no comparte el giro terrestre de veinte cuatro horas, pero ella da la vuelta alrededor de nuestro planeta durante un mes. Durante 62 horas del vuelo desde Moscú a San Jacinto, la Luna ha podido inscribir alrededor de Tierra un arco de 30°, y esto no podría no depender del trayecto del vuelo para un observador de la Luna. En el camino de avión, observado con respecto del Sol, aparecía el tercer movimiento, el giro de Tierra alrededor del Sol.

"El movimiento del cuerpo aislado no existe, únicamente existe movimiento relativo", - dijo F. Engels en la "Dialéctica de la naturaleza".
La tarea examinada ahora asegúranos en esto.
Volver

13. Longitud de la correa de transmisión

Cuando los alumnos de escuela profesional terminaron su trabajo, el maestro al despedirse propuso solucionar un

Problema

"Para una de las nuevas instalaciones de nuestro taller, dijo el maestro, se necesita ensamblar la correa de transmisión, pero no sobre dos poleas, como era normalmente, sino sobre las tres, y el maestro les enseñó el esquema de la transmisión (figura 138).

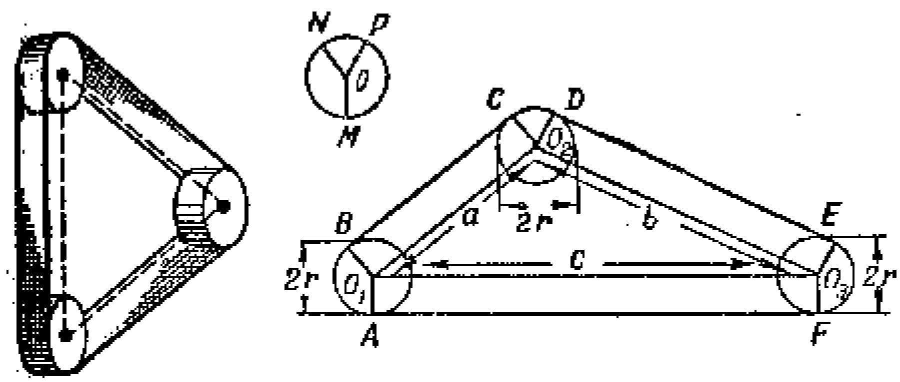


Figura 138. El esquema de transmisión. ¿Cómo encontrar la longitud de la correa de transmisión, utilizando solamente las medidas dadas?

Las tres poleas, continuaba él, tienen las mismas medidas. Sus diámetros y las distancias entre sus ejes son indicadas en el esquema.
¿Cómo, sabiendo estas medidas y sin hacer mediciones suplementarias, encontrar rápido la longitud de la correa de transmisión?"
Los alumnos empezaron a pensar. De pronto alguno de ellos dijo:
" Penso, que toda dificultad es, que no están indicadas las medidas de los arcos AB, CD, EF, sobre cual la correa enarca cada uno de rodillos. Para encontrar la longitud de cada arco necesitamos saber el valor de ángulo central y, a mí me parece, sin transportador no se arreglará."
"Los ángulos, de los que estas hablando, contestaba el maestro, podemos calcular sobre las medidas indicadas en el figura con ayuda de las fórmulas y tablas trigonométricas, pero este camino es muy largo y difícil. También no necesitaremos aquí el transportador, por que no hace falta saber longitud de cada uno arco, es suficiente saber…".
"Su suma, dijeron los chicos, dando cuenta de qué se trata" .
"Bueno, pero ahora os vais a casa y mañana trajerais vuestras soluciones."
No tengáis la prisa de conocer la solución, la cual trajeron los chicos.
Después de todo, con lo que ha dicho el maestro no es difícil solucionar por si mismo.

Solución.

En realidad, la longitud de la correa se encuentra muy fácil: A la suma de la distancia entre ejes de rodillos hay que añadir la longitud de la circunferencia de una polea. Si la longitud de la correa es l, entonces

$$l = a + b + c + 2\pi r$$

Sobre aquello, que la suma de las longitudes de arcos, con los cuales esta en contacto la correa, forma la longitud total de una polea, encontraron la clave todos los alumnos, pero demostrar una solución ha sido difícil para algunos.
De las todas soluciones el maestro ha preferido la mas corta el siguiente.
Sea BC, DE, FA, son tangentes a las circunferencias (figura 138). Pasaremos los radios en los puntos del contacto. Como las circunferencias de las poleas tienen mismos radios, entonces las figuras O_1BCO_2, O_2DEO_3 y O_1O_3FA, son rectángulos, por lo tanto,

$$BC + DE + FA = a + b + c.$$

Deja enseñar, que la suma de las longitudes de arcos AB + CD + EF se forman la longitud completa de circunferencia.
Para esto construiremos la circunferencia O con el radio r (figura 138 arriba). Pasamos OM || O_1A, ON || O_1B y OP || O_2D, luego $\angle MON = \angle AO_1N$, $\angle NOP = \angle CO_2D$, $\angle POM = \angle EO_2F$, como los ángulos con lados paralelos.

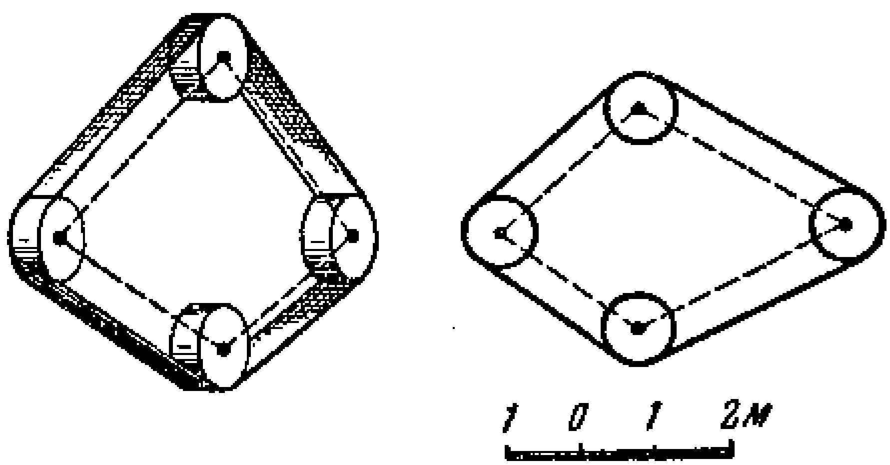


Figura 139. Necesito traducir del figura a las medidas necesarias y calcular la longitud de la cinta de transmisión.

De aquí se deduce, que

$$AB + CD + EF = MN + NP + PM = 2\pi r.$$

Entonces la longitud de la correa es $l = a + b + c + 2\pi r$.
Con el mismo modo podemos enseñar, que no solamente para tres, sino para cualquier cantidad de las poleas iguales, la longitud de la correa de transmisión será equivalente a la suma de los intervalos entre sus ejes mas la longitud de la circunferencia de una polea.

***Problema**.*
En el figura 139 hay un esquema de la transmisión a cuatro ruedas (también hay ruedas intermedias, pero el esquema no incluye, como no tiene gran influencia para solución). Utilizando la escala, indicada en el figura, introduzcan las medidas necesarias y calculen la longitud de la cinta.
Volver

14. Una tarea sobre la corneja prudente
Nuestros manuales escolares tienen una historia de “una corneja muy prudente”. Esta historia antigua cuenta de una corneja, muerta de sed ha encontrado un jarro con agua.

Había muy poca agua en el jarro, y con el pico no ha sido posible conseguirla, pero la corneja cayó en la cuenta como ayudarse a sí misma. Comenzó a tirar los pedruscos en el jarro. En resultado de esta argucia hizo subir el nivel de agua hasta los bordes, y la corneja ha podido tomar el agua.

No vamos a entrar en este asunto, si puede haber una corneja tan inteligente. El caso nos interesa de parte geométrica. Deja motivo para examinar la siguiente

Problema.

¿Si pudiera la corneja tomar, si el agua estaba en la mitad del jarro?

Solución.

Examinando esta tarea nos asegurará, que el modo de corneja, se acerca a la respuesta, pero no sobre cualquier nivel principal de agua en el jarro.

Para facilitar, admitiremos, que el jarro tiene la forma de una prisma rectangular, y pedruscos son unas pelotillas del mismo tamaño. Es fácil de comprender, que el agua se sube sobre nivel de los pedruscos en aquel caso, cuando el ahorro del agua ocupa el mayor volumen, que espacio entre pedruscos: Luego el agua llenará los espacios y saldrá por encima de pedruscos. Vamos a calcular cuál volumen ocupan estos espacios. Más fácil hacer el calculo sobre aquella disposición de los pedruscos, cuando el centro de cada uno esta situado sobre una línea recta vertical con los centros de pelotillas de arriba y de abajo.

Sea d – diámetro de la pelotilla y por lo tanto, su volumen es $1/6 \times \pi d^3$, el volumen del inscrito a su rededor cubico d^3. La diferencia de sus volúmenes d^3 - $1/6\ \pi d^3$ es el volumen de la parte vacía del cubo, y la proporción es

$$\frac{d^2 - \frac{1}{6}\pi d^3}{d^2} = 0{,}48$$

significa, que la parte vacía de cada cubo forma 0,48 de su volumen. La misma parte, es decir un poco menos de la mitad, forma la suma de los volúmenes de todas vacuidades sobre el volumen del jarro. La cosa no se cambiara, si el jarro no tiene la forma prismática, y los pedruscos no tienen la forma esférica. En cualquier caso podemos afirmar, si principalmente el jarro lleno de agua al menos de la mitad, la corneja no podrá subir el nivel hasta los bordes, tirándole pedruscos.

Será la corneja mas fuerte, tanto, que era capaz de reducir al menor volumen y conseguir un estado compacto de los pedruscos, ella pudiera subir en dos veces mas, del nivel principal. Pero ella no es capaz de hacer esto, y permitiendo la colocación friable de los pedruscos, nosotros estamos de acuerdo de acuerdo con las condiciones reales. Además los jarros, habitualmente, en la parte del centro son más anchos; Esto también tiene que disminuir la subida de agua y se apoya nuestra conclusión correcta: Si el agua estaba mas bajo de la mitad, la corneja no ha podido tomar agua.

Volver