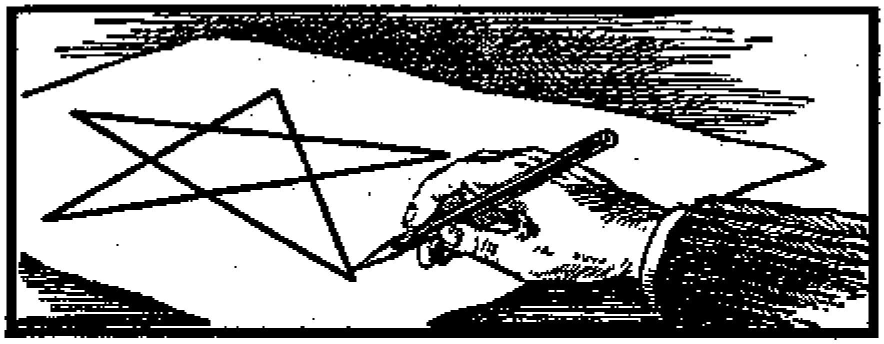
GEOMETRÍA RECREATIVA
SEGUNDA PARTE
ENTRE PASO Y BROMA EN GEOMETRÍA



CAPITULO DÉCIMO
GEOMETRÍA SIN MEDICIONES Y SIN CÁLCULOS

Contenido:

1. Construcción sin compás

Cuando necesitamos solucionar las tareas geométricas de construcción habitualmente aprovechan la regla y compás. Sin embargo, ahora vamos a ver que algunos casos se solucionan sin instrumentos suplementarios.

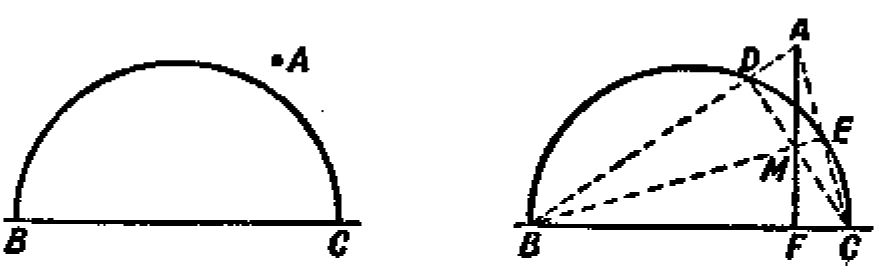


Figura 140. El primer caso. La tarea de construcción y su solución

Problema:
Desde el punto A (figura 140, a la izquierda), estando fuera de la semicircunferencia dada, bajar la perpendicular sobre su diámetro sin utilizar el compás. La ubicación del centro de semicircunferencia no está indicada.

Solución:
Para nosotros va bien aquella característica del triángulo que todas sus alturas se cruzan en un punto. Uniendo *A* con *B* y *C:* obtendremos los puntos *D* y *E* (figura 140, a la derecha). Las rectas *BE* y *CD,* evidentemente, las alturas del triángulo *ABC.* La tercera altura es la perpendicular de *BC* buscada, tendrá que pasar a través del punto de intersección de las otras dos, es decir a través del punto *M.* Pasando con la regla a través de los puntos *A* y *M* una recta, nosotros respondemos a las exigencias de la tarea, sin utilizar el compás.

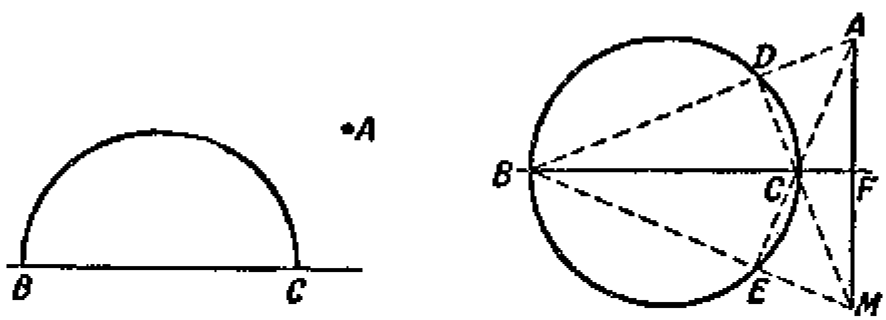


Figura 141. La misma tarea. El caso siguiente

Si el punto esta situado de modo que la perpendicular buscada baja *a la continuación* del diámetro (figura 141), entonces la tarea podrá ser solucionada con una condición, que tengamos no una semicircunferencia, sino la circunferencia completa. La figura 141 indica, que la solución no es distinta de aquella, la cual ya conocemos; solamente las alturas del triángulo *ABC* se cruzan no dentro, sino fuera de él.
Volver

2. El centro de gravedad de una placa
Problema:
Quizás, Uds. saben, que el centro de gravedad de una placa fina, teniendo la forma rectangular o la forma del rombo, está en el punto de intersección de sus diagonales, y si la placa es triangular, entonces esta en el punto de intersección de sus medianas, si es un círculo, en el centro de este círculo.
Prueben ahora adivinar, cómo encontrar el centro de gravedad por el camino de la construcción de una placa, formada por dos rectángulos cualquiera, unidos en una figura, presentada en el figura 142.
Las condiciones son usar únicamente la regla, nada más, sin cálculos ni mediciones.

Solución:
Continuaremos lado *DE* hasta intersección con *AB* en el punto *N* y el lado *FE* hasta intersección con *BC* en el punto *M* (figura 143). Desde el principio la figura actual vamos a examinar como construida por dos rectángulos *ANEF* y *NBCD.* El centro de gravedad de cada uno esta en los puntos de intersección de sus diagonales – O_1 y O_2.

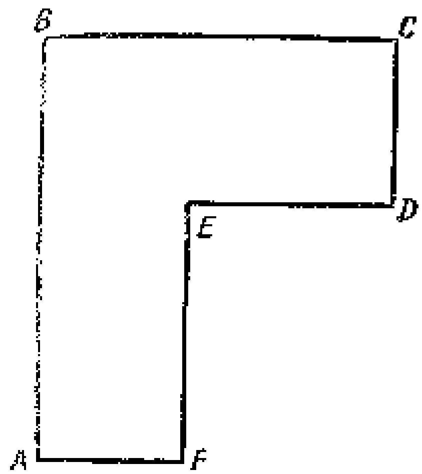


Figura 142. Aprovechando la regla, encuentren el centro de gravedad de la placa.

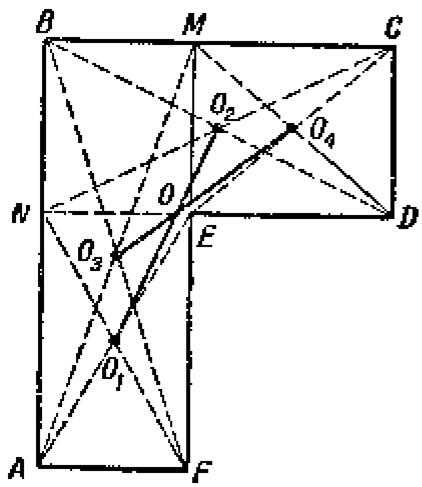


Figura 143. El centro de gravedad de la placa esta encontrada

Por lo tanto, el centro de gravedad de figura completa esta sobre la recta O_1O_2. Ahora la misma figura vamos a ver como esta constituida por dos rectángulos *ABMF* y *EMCD,* donde los centros de gravedad están en los puntos de intersección de sus diagonales O_2 y O_4. El centro de gravedad de toda la figura está sobre la recta O_3O_4. Entonces, él esta situado en el punto *O* de intersección de las rectas O_1 O_2 y O_3 O_4. En realidad todas estas construcciones se hacen únicamente con ayuda de regla.
Volver

3. Una tarea de Napoleón

Nosotros dedicábamos el tiempo a las construcciones, hechas con la ayuda de una sola regla, sin compás (con una condición: la circunferencia está dada al principio). Ahora vamos a examinar un par de tareas, donde se introduce un límite inverso: está prohibido utilizar la regla, y todas las construcciones las deberemos hacer con solo el compás. Por una de estas tareas estuvo interesado el Napoleón I (como sabemos, fue un admirador de la matemática). Recitando un libro sobre estas construcciones de un científico italiano Macceroni, él propone a los matemáticos franceses lo siguiente:

Problema:
La circunferencia dada hay que dividirla en cuatro partes equivalentes entre sí, sin usar la regla, La ubicación de su centro está dado.

Solución:
Es necesario dividir en cuatro partes la circunferencia *O* (figura 144). Desde un punto *A* arbitrario sobre la circunferencia tomamos tres veces el radio del circulo: obtenemos los puntos *B, C* y *D.* Es fácil de ver, que la distancia *AC* es la cuerda del arco, formada por ½ de circunferencia, es el lado del triángulo equilátero inscrito y, por lo tanto, es equivalente al $r\sqrt{3}$ donde *r* es el radio de circunferencia. *AD,* evidentemente, es el diámetro de la circunferencia. Desde los puntos *A* y *D* con un radio equivalente a *AC,* localizaremos los arcos, cruzados en el punto *M.* Enseñaremos, que la distancia *MO* es equivalente a un lado del cuadrado, inscrito en nuestra circunferencia. En el triángulo *AMO* el cateto

$$MO = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{3r_2 - r^2} = r\sqrt{2}$$

es decir al lado del cuadrado inscrito. Nos queda ahora con una sola abertura de compás, equivalente a *MO,* reservar en la circunferencia sucesivamente a los siguientes cuatro puntos, para tener las alturas del cuadrado inscrito, las que, evidente, dividen la circunferencia en cuatro partes iguales.

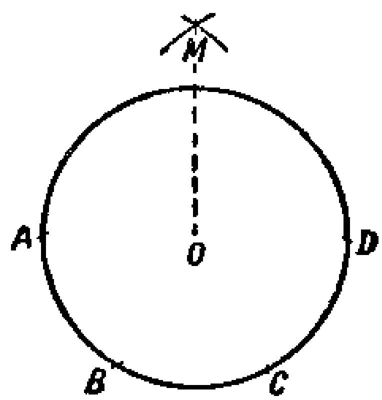


Figura 144. Dividir la circunferencia sobre cuatro Partes iguales, usando el compás.

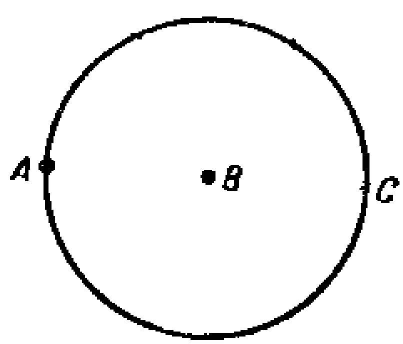


Figura 145. ¿Cómo aplicar la distancia entre los puntos A y B en n veces (n es el numero entero), usando el compás?

Problema:

El siguiente es más fácil y en el mismo sentido. Sin regla, ampliar el triángulo entre los puntos dados A y B (figura 145) en cinco veces la cantidad actual.

Solución:
Desde el punto *B* con el radio *AB* circunscribimos la circunferencia (figura 145). Sobre esta circunferencia medimos desde el punto *A* la distancia *AB* tres veces: Obtendremos el punto *C,* evidentemente, diametralmente opuesto a *A.* La distancia *AC* representa por si mismo el doble de la distancia *AB.* Pasando la circunferencia desde el punto *C* con el radio *BC,* podemos de esta manera encontrar el punto, diametralmente opuesto al *B* y, por lo tanto, alejado de *A* sobre el triple trayecto *AB* y etc.
Volver

4. Un simple trisector (trisección)
Aplicando solo el compás y una regla sin ningún tipo de divisiones y marcas, es posible dividir un ángulo dado en tres partes iguales. Por el contrario, la matemática no niega la posibilidad de cumplir la división con ayuda de otros tal instrumentos.

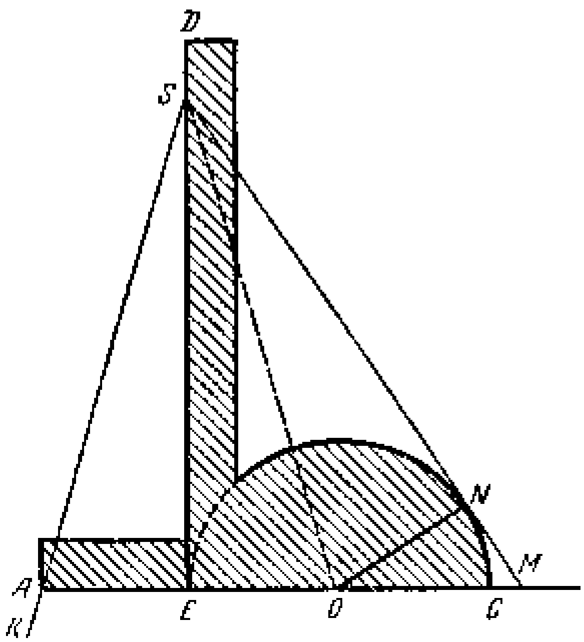


Figura 146. El trisector y el esquema de su uso

Se han inventado muchos aparatos mecánicos para lograr este asunto. Estos aparatos se llaman trisectores (trisecciones). Un simple trisector Uds. podrán preparar de un papel denso, de cartón o de una lata fina. Él va a servir como un aparato lineal y auxiliar.
En el figura 146 un trisector esta presentado en su tamaño natural (la figura sombreada). Rayada con semicírculo la cinta *AB* es equivalente a la longitud de su radio. El extremo *BD* de la cinta forma un ángulo recto con la línea recta *AC;* La toca medio circulo en el punto *B;* Longitud de esta cinta es arbitraria. En la misma figura estamos viendo el uso del trisector. Sea, por ejemplo que es necesario dividir $\angle$ KSM sobre tres partes equivalentes (figura 146). El trisector se coloca de modo que la altura del ángulo *S* esta en la línea *BD,* uno de los lados del ángulo pasará a través del punto *A,* y el otro lado tocara el semicírculo[1]. Luego

[1] La posibilidad de esa colocación del nuestro trisector en ángulo dado es la consecuencia de una simple característica de los puntos de las rayas, divididas el ángulo sobre las tres partes equivalentes: Si desde cualquier punto *O* de la raya *SO* pasarlo segmentos *ON* ^*SN* y *OA* ^*SB* (figura 147), entonces vamos a tener: *AB* = *OB* = *ON.* El lector mismo podrá examinar.

pasaran las rectas *SB* y *SO,* y la división del ángulo sobre las tres partes iguales se ha terminado. Para asegurarnos uniremos con el segmento de la recta el centro del semicírculo *O* con el punto del toque *N.* Es fácil verlo, que el triángulo *SBO* es equivalente al *OSN.* La igualdad de estos triángulos se demuestra ya que los ángulos *ASB, BSO* y *OSN* son equivalentes entre si, que lo necesitaba demostrar.
Volver

5. El reloj – trisector

Problema:

¿Es posible con ayuda del compás, la regla y el reloj, dividir un ángulo en tres partes iguales?

Solución:

Es posible. Se traspasa el ángulo dado sobre un papel transparente y en el mismo momento, cuando ambas agujas del reloj se juntan, colocan el figura sobre la esfera de modo que el vértice del ángulo coincida con el centro del giro de las agujas y la otra parte del ángulo pase a lo largo de las agujas (figura 147).

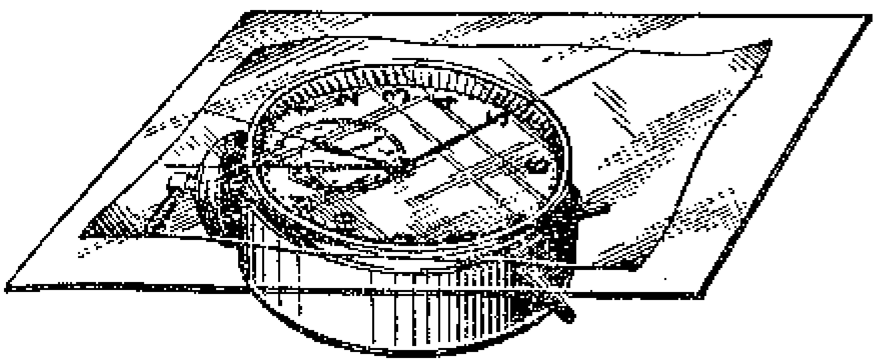


Figura 147. El reloj – trisector

Por el momento, cuando el minutero traspase hasta unión con el sentido de otra parte del ángulo dado, pasen desde la cima del ángulo una raya sobre el sentido del reloj. Se aparezca el ángulo, equivalente el ángulo del giro de las agujas. Ahora con ayuda del compás y la regla se duplican ese ángulo, y el ángulo duplicado otra vez duplicaran (el modo de duplicación se conoce de geometría).

Obtenido de esta manera el ángulo va a ser 1/3 del ángulo dado.

En realidad, tal vez, cuando la aguja de minutos circunscribe un tal ángulo a, la aguja del reloj durante ese tiempo traspasare en el ángulo, en 12 veces menor: $\alpha/12$, después de ampliación de este ángulo $4 \times \alpha/12 = \alpha/3$
Volver

6. La división de una circunferencia

Los radioaficionados, constructores, creadores de cualquier tipo de modelos y además aficionados de construir a mano a veces se quedaran pensativos sobre un

Problema:

Cortar de una placa un polígono justo con una cantidad dada de los lados. La tarea tiene su expresión en la siguiente forma:

Dividir la circunferencia en *n* partes iguales, donde *n* es el numero entero.

* * *

Dejaremos por un tiempo aparte la solución de esta tarea con ayuda del transportador, además es la solución “al ojo” y por lo tanto, pensaremos en la solución geométrica: con ayuda del compás y la regla.
Antes de todo aparece una pregunta: ¿En cuántas partes equivalentes es posible teóricamente dividir exactamente una circunferencia con ayuda del compás y la regla? Esta tarea había solucionada por matemáticos completamente, pero no sobre tal cantidad de partes.
Es posible en *2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, ..., 257, ...* partes.
No es posible en *7, 9, 11, 13, 14, ...* partes.
Además, no existe un único modo de construcción; El modo de división en *15* partes no es lo mismo, como en *12* partes, y etc., todos modos no serán posibles de recordar.
Hay un modo geométrico práctico preciso, aunque aproximado, pero bastante fácil para la división de circunferencia en cualquier cantidad de arcos equivalentes.
Por desgracia los manuales de geometría no ponen a la atención este asunto, por eso hemos preparado un modo aproximado y curioso de la solución geométrica de esa tarea.
Sea, por ejemplo, se necesita dividir la circunferencia actual (figura 148) en nueve partes iguales.

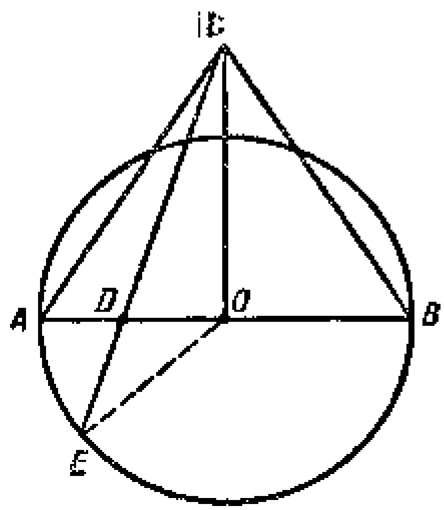


Figura 148. El modo aproximadamente geométrico de la división a la circunferencia sobre n partes equivalentes.

Construiremos sobre un diámetro *AB* de la circunferencia un triángulo equilátero *ACB* y dividiremos ese diámetros por el punto *D* de forma que $AD : AB = 2 : 9$ (en el caso general $AD : AB = 2 : n$).
Uniremos los puntos *C* y *D* por un segmento y continuaremos hasta intersección con la circunferencia en el punto *E.* Luego el arco *AE* formare aproximadamente 1/9 de la circunferencia (en el caso general $AE = 360°/n$ o la cuerda *AE* será el lado del *9*-polígono inscrito (*n* – angular).
El error relativo es @*0,8%.*

* * *

Si expresar la dependencia entre cantidad del ángulo *AOE* central, formado por la construcción actual, y con la cantidad *n* de división, entonces obtendremos la fórmula siguiente:

$$\mathrm{tg}\left(< AOC\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{n^2 + 16n - 32} - n}{n - 4}$$

la cual para n grande, es posible sustituir con una formula aproximada

$$\mathrm{tg}\left(< AOE\right) \cong 4\sqrt{3} \times (n^{-1} - 2n^{-2})$$

Por otra parte la división justa de la circunferencia en *n* partes iguales del ángulo central tiene que ser 360°/n. Comparando el ángulo 360°/n con el ángulo *AOE,* obtendremos la cantidad del error cometido, viendo el arco *AE* como parte de circunferencia.
Acá tenemos la tabla para algunos n significativos:

n	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*10*	*20*	*60*
360°/n	*120°*	*90°*	*72°*	*60°*	*51° 26'*	*45°*	*36°*	*18°*	*6°*
<AOE	*120°*	*90°*	*71°57¢*	*60°*	*51°31¢*	*45°11¢*	*36°21¢*	*18°38¢*	*6°26¢*
error (%)	*0*	*0*	*0,07*	*0*	*0,17*	*0,41*	*0,97*	*3,5*	*7,2*

Como vemos en la tabla, con el modo indicado es posible dividir la circunferencia en *5, 7, 8* o *10* partes con una equivocación no mayor de *0,07* hasta *1%;* Esta equivocación es admisible para mayoría obras prácticas. Con el crecimiento de cantidad *n* de las divisiones la exactitud del método va bajando, es decir el error relativo crecerá, pero, como lo dice la investigación, con tal n el error no supera al *10%.*
Volver

7. La dirección del golpe (una tarea sobre la bola de billar)
Mandar la bola de billar en la tronera no con el golpe directo, sino que a dos o tres bandas, esto significa, antes del todo, solucionar "mentalmente" una tarea geométrica " sobre la construcción".

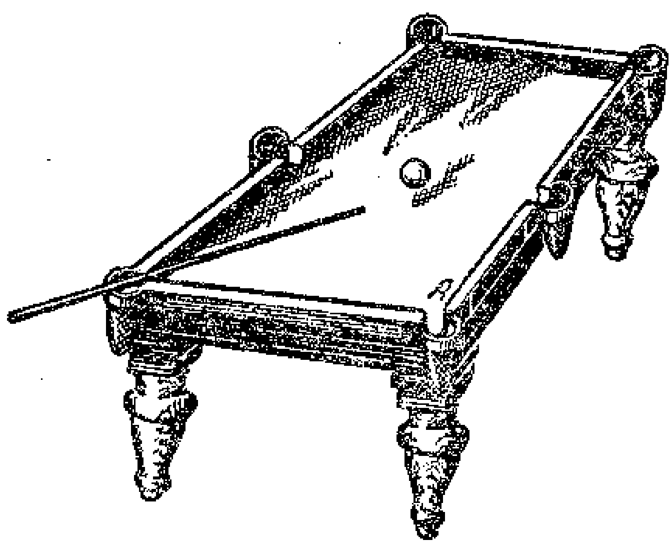


Figura 149. Una tarea geométrica encima de mesa de billar

Lo importante es "a ojo" encontrar el primer punto del golpe a la banda; de ahí en adelante el camino de la bola en la mesa está determinado por la ley de la reflexión ("el ángulo de incidencia es equivalente al ángulo reflexión")

Problema.
¿Qué construcciones geométricas podrán ayudarnos a encontrar la dirección del golpe, para que la bola, estado en el centro de la mesa, después de tres bandas entre en la tronera A? (figura 149)

Solución:
Imagínense, en el lado corto de la mesa se colocan junto tres mesas iguales de billar, y apuntaran al sentido de una tronera más lejana desde la tercera mesa imaginada.
La figura 150 ayudará comprender esta aseveración. Sea *OabcA* el camino de la bola. Si damos vuelta a " la mesa" *ABCD* entorno al *CD* en *180°,* su posición será I, luego dar vuelta también entorno al *AD* y otra vez en torno al *BC,* entonces ella tomara la posición III. En resultado la tronera *A* aparecerá en el punto, en el punto marcado por letra A_1.

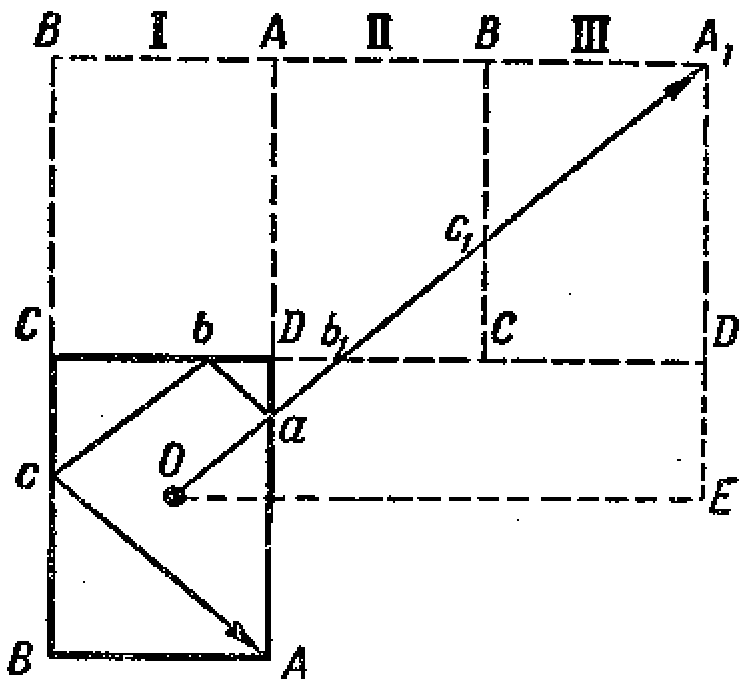


Figura 150. Imagínense, que junto a la mesa de billar están colocadas tres mas de estas mesas y apuntan en la dirección de la tronera más lejana.

Procediendo de la igualdad evidente de los triángulos, Uds. fácilmente podrán demostrarlo, que

$$ab_1 = ab, \quad b_1c_1 = bc \quad \text{y} \quad c_1A = cA,$$

es decir, que la longitud de la recta OA_1 es equivalente a la longitud de la línea quebrada *OabcA,* y ella alcanzara la tronera *A.* Vamos a ver otra pregunta aun más: ¿Bajo cuál condición serán los lados *OE* y A_1E del triángulo rectángulo A_1EO equivalentes?
Es fácil de establecer, que $OE = 5/2´ AB$ y $A_1E = 3/2´ BC$. Si $OE = A_1E$, entonces $AB = 3/2´BC$ o $AB = 3/5´ BC$.
Por lo tanto, si el lado más corto de la mesa de billar forma *3/5* del lado largo, entonces $OE = EA_1$, en este caso el golpe, estando de bola por el medio de la mesa, podrán apuntar sobre ángulo de *45°* al borde.
[Volver]

8. La bola “inteligente”

No tan complicadas construcciones geométricas nos ayudaban a solucionar la tarea sobre la bola de billar, y ahora será mejor si la misma bola solucionara una tarea muy antigua y curiosa.

¿Esto es posible? – una bola no puede pensar. Es cierto, pero en aquellos casos, cuando es necesario hacer cálculos, además sabiendo, cuales son operaciones sobre cantidades y en que orden deberemos cumplir, este calculo puede hacer la maquina, la que cumpliera a todas las ordenes rápido y correctamente.

Por eso hay inventados muchos mecanismos, comenzando por un simple aritmómetro hasta una calculadora eléctrica.

Durante el tiempo de ocio a menudo se ocupen por una tarea: Como verter una parte de liquido, que contiene un recipiente de una capacidad dada con ayuda de otros dos vasos vacíos, también con una capacidad dada.

Aquí tienen una tarea del mismo sentido:

***Problema**:*

¿Cómo verter la misma cantidad de un tonel con capacidad de 12 cántaros[2] *con ayuda de dos cubos con capacidad de nueve cántaros y de cinco cántaros?*

Solución.

Para solucionar esta tarea, por supuesto, no hace falta hacer experimentos con estos cubos. Todos lo “trasiegos” necesarios los podemos hacer en el papel, con la ayuda de este esquema.

9 Cántaros	9-ведерн.	0	7	7	2	2	0	9	6	6
5 Cántaros	5-ведер.	5	5	0	5	0	2	2	5	0
12 Cántaros	12-ведерн.	7	0	5	5	10	10	1	1	6

Cada columna esta marcada por un resultado de trasiego actual.

1. La primera: Llenaron el tonel de *5 cántaros,* de *9 cántaros* esta todavía vacía (*0*), de *12 cántaros* le queda siete cántaros.
2. La segunda: Hay que verter siete cántaros del tonel de *12 cántaros* al de *9 cántaros* y etc.

El esquema tiene nueve columnas; Entonces se necesita de nueve trasiegos Uds. podrán probar encontrar su propia solución de este problema, teniendo su propio orden de los trasiegos.

Después que hagan Uds. sus pruebas, verificarán que el esquema propuesto no es único, sin embargo en otro orden, salen más de nueve trasiegos.

Además es curioso de establecer lo siguiente:

1. No es posible de establecer un tal orden fijo de trasiegos, el que podrá corresponder al cualquier caso, independientemente de capacidad de los cubos;
2. Es posible con ayuda de dos cubos vacíos verter desde un tercero una cantidad de liquido, es decir, por ejemplo, desde el tonel de *12 cántaros* con ayuda de cubos de *9* y *5 cántaros* trasiegan un cántaro o dos, o tres, cuatro y etc., hasta *11.*

[2] Antigua medida rusa de capacidad, equivalente a unos *12 litros*

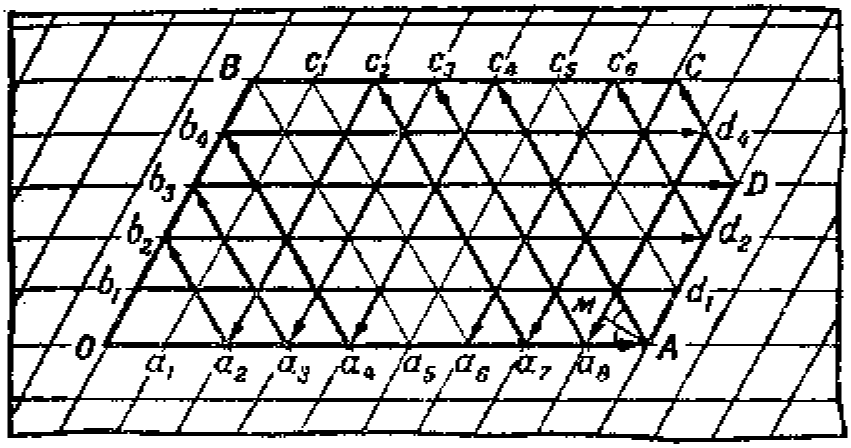


Figura 151. El "mecanismo" de la bola " inteligente".

A todas estas preguntas contestará la bola "inteligente", si nosotros ahora construimos para ella una "mesa de billar" muy especial.

Encima del papel dibujamos cuadros inclinados (rombos) iguales con ángulos agudos de *60°,* y se construye una figura *OABCD,* como en el figura 151.

Esto sería "la mesa de billar". Si empujáramos la bola de billar a lo largo de *OA,* entonces, chocando al borde *AD* y de acuerdo a la ley "El ángulo de incidencia es equivalente al ángulo reflejado" ($\angle OAM = \angle Mac_4$), correrá sobre la recta Ac_4 uniendo los vértices de los rombos pequeños; se separa en el punto c_4 del borde *BC* y correrá sobre la recta $c_4\ a_4$ luego sobre las rectas $a_4\, b_4$, $b_4\, d_4$, $d_4\, a_8$ y etc.

Por condiciones del problema tenemos tres cubos: de *9, 5, 12 cántaros.* De acuerdo con esto construiremos la figura de modo que el lado *OA* mantenga los nueve cuadros, *OB,* cinco cuadros, *AD* tres cuadros *(12 – 9 = 3), BC* son siete cántaros[3] *(12 – 5 = 7).*

Tomaremos la nota, que cada un punto sobre los lados de la figura esta separado con una cantidad de cuadros dados desde los lados *OB* y *OA.* Por ejemplo, desde el punto c_4, hay cuatro cuadros hasta *OB* y cinco cuadros hasta *OA;* Desde el punto a_4 son cuatro cuadros hasta *OB* y *0* cuadros hasta *OA* (porque el mismo esta en la *OA*), desde el punto d_4 son ocho cuadros hasta *OB* y cuatro cuadros hasta *OA* y etc.

Por lo tanto, cada un punto sobre los lados de figura, al que se choca la bola, señala dos números.

El primero de ellos, es decir la cantidad de cuadros, separando el punto de *OB,* significa la cantidad de cántaros de un cubo de *9 cántaros*, y el otro, es decir la cantidad de cuadros, separando el mismo punto de *OA,* significa la cantidad de cántaros con liquido dentro de cubo de *5 cántaros.* Resto del liquido, evidentemente, será en el cubo de *12 cántaros.*

Ahora tenemos todo listo para solución con ayuda de bola.

Dejamos pasar a lo largo de *OA* y traduciendo el cada un punto de su golpe al borde así, como esta indicando, observándola su camino hasta el punto a_6 (figura 151).

El primer punto del choque: *A (9; 0);* Esto significa, primer trasiego tiene que dar esta distribución del liquido:

9 cántaros	9
5 cántaros	0
12 cántaros	3

[3] Un cubo lleno siempre es mayor de tres. La capacidad de los cubos vacíos *a* y *b,* del cubo lleno – *c.* Si $c \geq a + b$, entonces "la mesa de billar" la tenemos que construir como un paralelogramo con los lados *a* y *b* de cuadros.

Esto esta realizado.

El segundo punto del choque: *c_4 (4; 5);* Esto significa, la bola entrega el siguiente resultado de trasiego:

9 cántaros	9	4
5 cántaros	0	5
12 cántaros	3	3

Esto también es real.
El tercer punto del choque: *a_4 (4; 0);* con tercer trasiego la bola recomienda devolver cinco cántaros al cubo de *12 cántaros:*

9 cántaros	9	4	4
5 cántaros	0	5	0
12 cántaros	3	3	8

El cuarto punto: *b_4 (0; 4);* es el resultado de cuarto trasiego:

9 cántaros	9	4	4	0
5 cántaros	0	5	0	4
12 cántaros	3	3	8	8

El quinto punto: *d_4 (8; 4),* la bola recomienda llenar con ocho cántaros al cubo vacío de *9 cántaros.*

9 cántaros	9	4	4	0	8
5 cántaros	0	5	0	4	4
12 cántaros	3	3	8	8	0

Siguen observando la bola, y recibiremos la tabla:

9 cántaros	9	4	4	0	8	3	3	0	9	7	7	2	2	0	9	6	6
5 cántaros	0	5	0	4	4	5	0	3	3	5	0	5	0	2	2	5	0
12 cántaros	3	3	8	8	0	4	9	9	0	0	5	5	10	10	1	1	6

Entonces, después de la serie de trasiegos la tarea esta lograda: Dentro de dos cubos hay seis cántaros del liquido. ¡La bola ha solucionado el problema!
Pero la bola no parece muy inteligente.
Ella ha solucionado la tarea haciendo 18 pasos, y nosotros necesitábamos solamente 9 pasos (ver la primera tabla).
Sin embargo la bola también podrá abreviar la serie de trasiegos. Primero empujando sobre el *OB,* pararlo en el punto *B,* luego otra vez empujen sobre *BC,* y luego lo mejor que se mueva con acuerdo con la ley de "el ángulo de incidencia es equivalente al ángulo reflejado"; obtenemos la serie mas corta de trasiegos.
Permitiendo a la bola su movida después del punto a_6, entonces no es difícil de comprobar, que en el caso examinado ella repasará todos los puntos marcados de la figura (y en principio, todos los vértices del rombo) y solamente luego volverá al punto principal *O.* Esto significa, que desde el cubo de *12 cántaros* pueden llenar al cubo de *9 cántaros* cualquiera

cantidad entera de los cántaros desde el uno hasta nueve, y al de *5 cántaros,* desde uno hasta cinco.

Pero la tarea del mismo sentido podrá sin tener la solución exigida.

¿Cómo se ve todo eso la bola?

Muy fácil: en este caso ella volverá en el punto principal *O,* sin chocar el punto fijo.

En el figura 152 se presenta el mecanismo de solución para los cubos de nueve, siete y doce cántaros.

9 cántaros	9	2	2	0	9	4	4	0	8	8	1	1	0	9	3	3	0	9	5	5	0	7	7	0
7 cántaros	0	7	0	2	2	7	0	4	4	0	7	0	1	1	7	0	3	3	7	0	5	5	0	7
12 cántaros	3	3	10	10	1	1	8	8	0	4	4	11	11	2	2	9	9	0	0	7	7	0	5	5

"El mecanismo" le indica, que desde un cubo lleno de *12 cántaros* con ayuda de cubos vacíos de *9 cántaros* y *7 cántaros* es posible verter cualquier cantidad de los cántaros, menos la mitad de su contenido, es decir menos de seis cántaros.

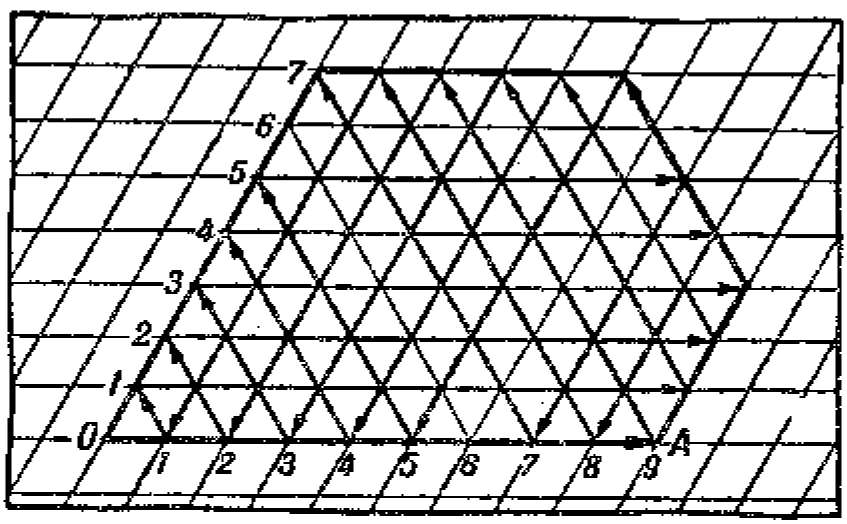


Figura 152. "El mecanismo" le indica, que el cubo lleno de 12 cántaros no son posibles de verter por la mitad con ayuda de dos cubos de 9 y 7 cántaros.

En el figura 153 se presenta el mecanismo de solución para cubos de tres, seis y ocho cántaros. Aquí la bola hace cuatro saltos y vuelve al punto principal *O.*

6 cántaros	6	3	3	0
3 cántaros	0	3	0	3
8 cántaros	2	2	5	5

La tabla le enseña que en este caso no es posible verter cuatro cántaros o un solo cántaro de un cubo de *8 cántaros.*

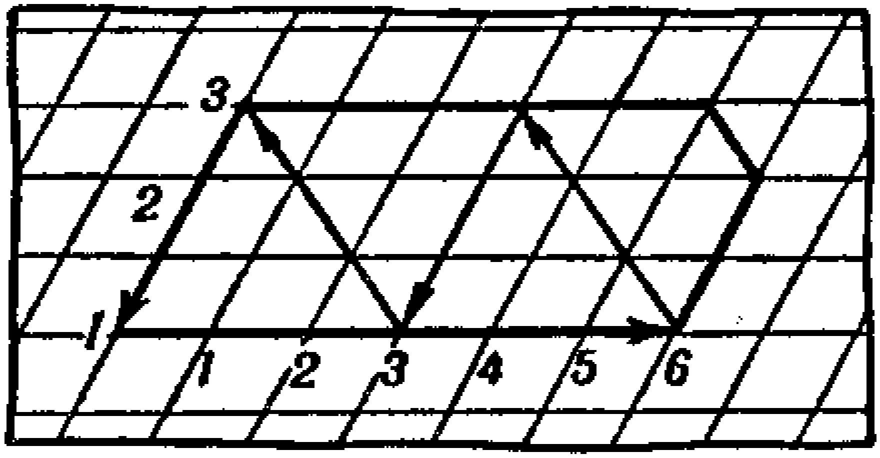


Figura 153. "El mecanismo" de solución de una tarea más.

De esta manera nuestro "billar con una bola inteligente" en realidad es una calculadora original, excelente para solucionar los problemas de trasiegos.
Volver

9. Con un solo plumazo

Problema:
Copien encima de un papel las cinco figuras presentadas en el figura 154, y prueben con un solo plumazo dibujar una de ellas, es decir sin levantar la pluma y sin pasar mas de una vez sobre la misma línea.
La mayoría de aquellos, a quienes les hemos propuesto la tarea, empiezan por la figura d, a primera vista más fácil, sin embargo, todas las pruebas de dibujar esta figura han fracasado. Disgustados y la menor certeza lo harían otras figuras y, por sorpresa, sin grandes dificultades lograron a las dos primeras figuras y también han podido con la tercera, presentada por la tachada palabra "Ä Î Ì". Pero la quinta figura e, como la cuarta d, nadie no había podido solucionarlo.
¿Por qué para algunas figuras resulta fácil encontrar la solución, para otros no? ¿Podría ser, solo porque en unos casos hace falta tener la ingeniosidad, o podría se, que la tarea por si misma es insoluble para algunas figuras? ¿No se puede en este caso dejar una señal, sobre cual podemos justificar: ¿Existe una probable solución de dibujar la figura con un solo plumazo o no existe?

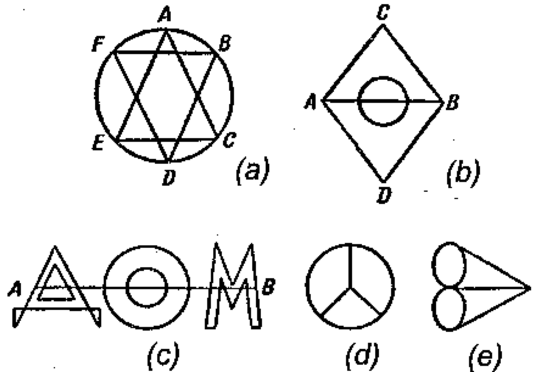


Figura 154. Prueban dibujar cada una de estas figuras con un solo plumazo, sin pasar mas de una vez sobre la misma línea.

Solución:

Cada una intersección, donde se unen las líneas de la figura, se van a llamar los nodos. Además llamaremos el nodo par, si en él se juntan un número par de las líneas, e impar, si la cantidad de las líneas unidas es impar. La figura *a* tiene todos los nodos pares, la figura *b,* dos nodos son impares (los puntos *A* y *B*); la figura *c,* los nodos impares son fines del segmento, tachados de la palabra; Las figuras *d* y *e* tienen cuatro nodos impares.

Vamos mirar atentamente la figura, donde todos nodos son pares, por ejemplo, la figura *a.* Empezaremos nuestro camino desde cualquier punto *S.* Pasando, por ejemplo, por el nodo *A,* nosotros dibujamos dos líneas: se acerca a *A* y se aleja de *A.* Como desde cada nodo par hay tantas salidas, cuantas entradas en él, entonces sobre movimiento de nodo al nodo cada vez menos dos líneas no dibujadas, por lo tanto, principalmente es posible, contornear (dejar atrás, dar una vuelta alrededor de todos), volver en el punto principal *S.*

Pero, supongamos, que habíamos vuelto en el punto principal, y no existe la salida de él, y sobre la figura falta una línea, saliendo de tal nodo *B,* donde nosotros ya estuvimos.

Entonces, hay que corregir nuestro camino: Llegando hasta el nodo *B,* antes de dibujar las líneas dejadas, volviendo al punto *B,* caminar adelante por el camino remoto.

Supongamos que decidimos repasar la figura *a* así: Al principio a lo largo de los lados del triángulo *ACE,* luego volviendo al punto *A,* sobre la circunferencia *ABCDEFA* (figura 154).

Como nos queda dibujar el triángulo *BDF,* entonces, antes de dejar el nodo, por ejemplo *B* y siguiéremos sobre el arco *BC,* tenemos que pasar el triángulo *BDF.*

Pues, si todos los nodos de la figura dada son pares, entonces, saliendo del cualquier punto de figura, siempre es posible de dibujar la figura con un solo plumazo, además la vuelta por la figura tiene que terminar en el mismo punto, donde comenzábamos.

Ahora vamos a ver la figura donde hay dos nodos impares.

La figura *b,* por ejemplo, tiene dos nodos impares *A* y *B*. Entonces también es posible de dibujar con un solo plumazo. En realidad es mejor empezar la vuelta desde el nodo impar N_1 y pasando sobre una tal línea hasta el nodo impar N_2, por ejemplo, desde *A* hasta el *D* sobre *ACB* (figura 154).

Dibujando esta línea, por aquello mismo excluiremos cada una línea de los nodos impares, como si no existiera esa línea. Ambos nodos impares luego se convierten en pares. Como otros nodos impares no existen en la figura, entonces, ahora tenemos una figura solamente con nodos pares; En la figura *b,* por ejemplo, después de pasando la línea *ACB* le queda el triángulo con circunferencia.

A esta figura, como ha sido enseñado, podemos dibujar con un solo plumazo, por lo tanto, podemos dibujar la figura completa.

Una advertencia suplementaria: Comenzando la vuelta desde un nodo impar N_1, se necesita el camino, llevado al nodo impar N_2, tenemos que elegir así, que no aparezcan las figuras aisladas de figura dada[4]. Por ejemplo, dibujando la figura *b* (figura 154) ha sido sin éxito la prisa trasladarse desde un nodo impar *A* al nodo impar *B* sobre la recta *AB,* como sobre esto la circunferencia quedaba aislada de la figura completa y cerrada.

Entonces, si una figura tiene dos nodos impares, el plumazo acertado tiene que comenzar sobre uno de ellos y terminarse en otro.

Entonces, los fines del plumazo son separados. De aquí se deduce, si la figura tiene cuatro nodos impares, entonces es posible de dibujar con un solo plumazo, sino con dos, pero esto no corresponde a las condiciones de nuestra tarea. Así son figures *d* y *e* (figura 154).

Como ven, si comprendemos correctamente, entonces muchas cosas podemos prevenir y con esto librarnos de un trabajo innecesario, el que necesita fuerzas y tiempo; Pues, a motivarnos correctamente nos enseña también y la geometría.

Puede ser, que nuestras explicaciones son muy pesadas para Uds., pero todas las fuerzas podrán ser cubiertas por ventaja, la de conocimiento sobre la ignorancia.

[4] Los detalles sobre este asunto, los lectores podrán encontrar en los manuales de topología.

Uds. siempre podrán con antelación resolver, si el problema se soluciona o no sobre las figuras dadas, y Uds. saben también, desde cuál nodo hay que empezar su vuelta.
Además Uds. ahora pueden inventar mismos a las figuras complejas para sus compañeros.
Finalmente, doy dos figuras más para entretención (figura 155).

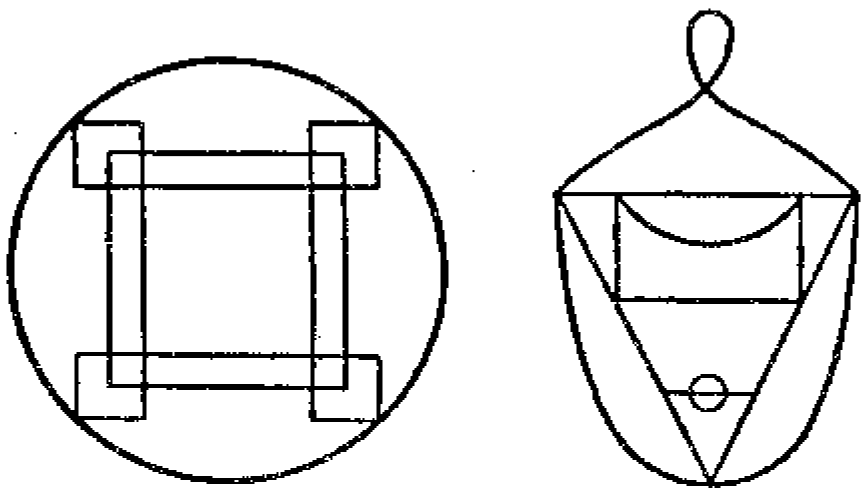


Figura 155. Dibuja cada figura con un solo plumazo.

Volver

10. Siete puentes del Kaliningrado

Hace doscientos años el ciudad Kaliningrado (antes se llamaba Quenigsberg) había siete puentes, los que unieron las orillas del río Pregel (figura 156).

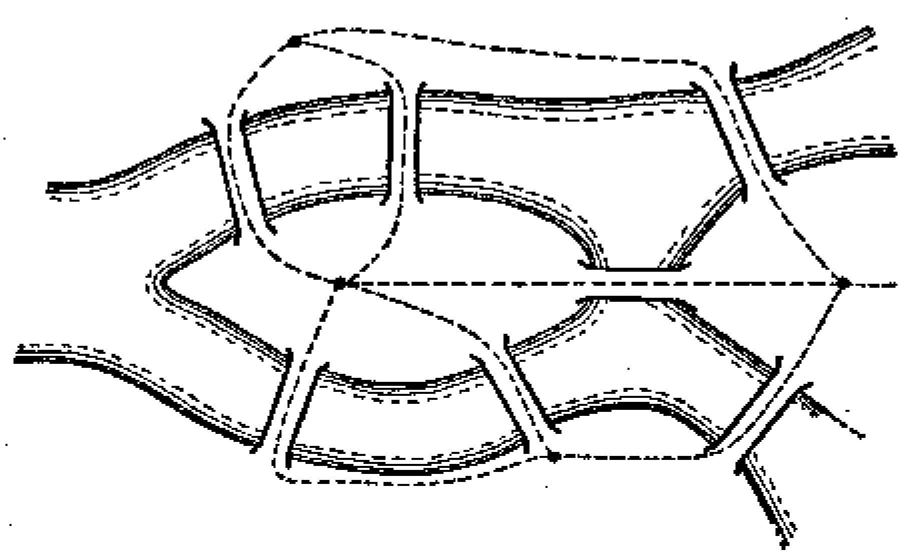


Figura 156. No era posible dar la vuelta por todos puentes, estando en cada uno de ellos por una sola vez.

En año 1736 un matemático famoso de aquel tiempo L. P. Eyler (teniendo 30 años de edad) estuvo interesado por una tarea: ¿Era posible pasear por la ciudad, pasando por todos los puentes, pero cada uno por una sola vez?
Es fácil de comprender, que esta tarea es parecida a la anterior, sobre figuras dibujadas.

Vamos a presentar el esquema de los caminos posibles (figura 156, la línea puntual). Obtendremos una de las figuras con cuatro nodos impares (figura 154, figura *e*). Con un solo plumazo, como Uds. saben, es imposible de dibujarlo y, por lo tanto, es imposible dar vuelta por todos los siete puentes, pasando por cada uno de una sola vez. Eyler en aquel tiempo le demostró.
Volver

11. Una broma geométrica
Después de que Uds. ya saben el secreto de la figura dibujada con éxito con un solo plumazo, díganse a sus amigos, que sabe cómo dibujar la figura con cuatro nodos impares, por ejemplo, la circunferencia con dos diámetros (figura 157), sin separar el lápiz del papel y sin pasarla una línea dos veces.
Uds. perfectamente saben, que es imposible, pero pueden hacer un anuncio sensacional. Ahora os enseño un pequeño truco.

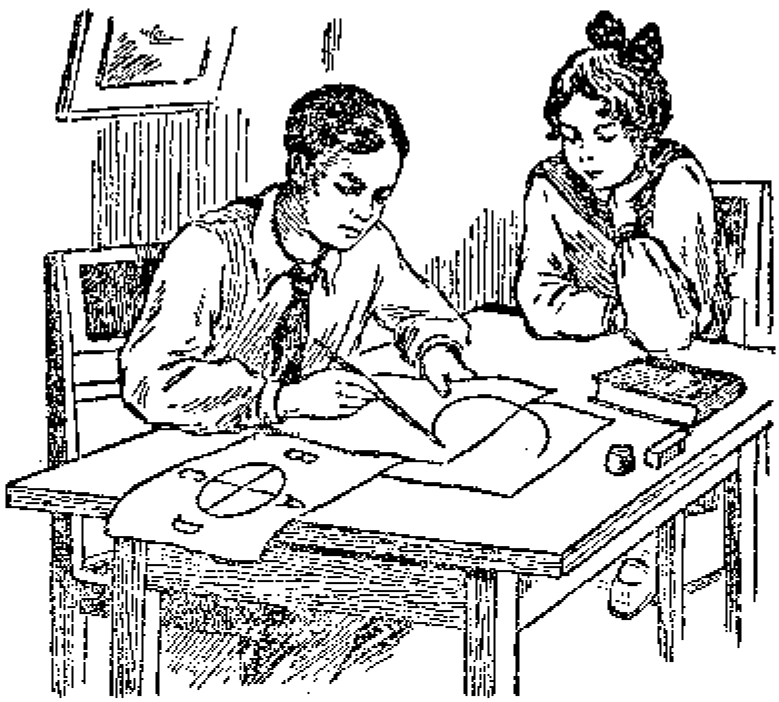


Figura 157. Una broma geométrica.

Empezamos a dibujar la circunferencia desde el punto *A* (figura 157). Cuando acercándose a un cuarto de circunferencia, el arco *AB,* colocaran un papel por encima, en el punto *B* (o doblando parte de abajo, donde se hace la construcción) y siguen con lápiz pasando la parte de debajo de la media circunferencia hasta el punto *D,* inverso al punto *B.*
Ahora quiten el papel colocado. En la parte facial del papel aparece solamente el arco *AB,* pero el lápiz esta en el punto *D* (¡además Uds. no separaron el lápiz del papel!).
Terminar la figura no es difícil: Al principio pasen el arco *DA,* luego el diámetro *AC,* al arco *CD,* al diámetro *DB* y por fin, el arco *BC.* Podemos elegir otro camino desde el punto *D;* Prueben encontrarlo.
Volver

12. Comprobación de una forma
Problema:

Deseando comprobar, si tiene el trozo de la tela cortada la forma del cuadrado, la costurera nos asegura, que doblando sobre diagonales, los bordes del trozo se unen. ¿Es suficiente esta comprobación?

Solución:
De esta manera la costurera se asegura solamente en que todas las partes de tela cuadrada son equivalentes entre sí. De los cuadrados convexos esta propiedad la tiene no solo el cuadrado, sino cualquier rombo, y el rombo se presenta como cuadrado únicamente en el caso, cuando sus ángulos son rectos. Por lo tanto, la comprobación, utilizada por costurera, es insuficiente. Tenemos que, aunque”a ojo” asegurarse en aquello, que los ángulos sobre los vértices del trozo son rectos. Con esta razón podemos, por ejemplo, otra vez, si se juntan los ángulos, estado junto a un lado.
Volver

13. Un juego
Para ese juego necesitamos el papel rectangular y algunas figuras de la misma forma simétrica, por ejemplo, las placas de dominó, monedas, etc. La cantidad de figuras debe ser suficiente para cubrir todo el papel. Juegan los dos. Los jugadores por turnos colocan las figuras en cualquier posición, en cualquier sitio libre del papel hasta aquel punto, cuando no se queda el sitio.
No es admisible mover las figuras, ya colocadas, encima de papel. Gana el partido aquel, quien ponga el ultimo objeto.

Problema:
Encontrar el modo de dirigir el juego, donde el jugador que empieza el juego gane.

Solución:
El jugador que empieza el juego, debe como primer paso, ocupar el centro de plazoleta, colocando la figura de modo que su centro de simetría, si es posible, uniera con el centro del papel y los próximos veces colocar las figuras en la postura simétrica a la figura del enemigo (figura 158).
Siguiendo esa regla, el jugador que empieza el juego siempre encontrará en el papel un sitio para su figura y sin dudad ganara.
El fondo geométrico del modo indicado de llevar el juego es lo siguiente: Un rectángulo tiene el centro de simetría, es decir, un punto, donde todos segmentos pasados a través del, se divide por la mitad, y dividen la figura sobre los partes iguales.
Por eso al cada punto o sitio del rectángulo corresponde el punto simétrico o el sitio simétrico, perteneciendo a la misma figura, y solamente el centro no tiene el punto simétrico a sí mismo.

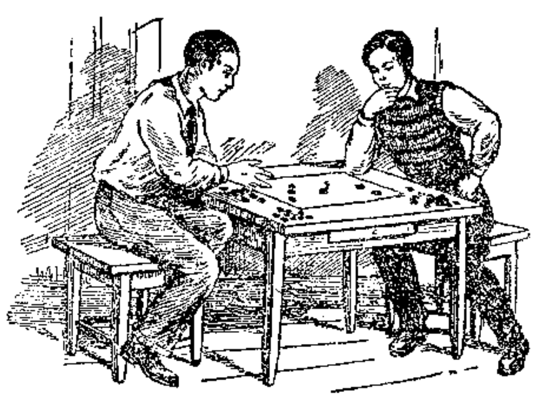


Figura 158. Un juego geométrico. Le gana aquella persona, quien ponga el ultimo objeto.

De aquí se deduce que si el primer jugador invade el sitio central, entonces, cualquier sitio del papel rectangular elegido por el enemigo no faltara una plazoleta libre y simétrica para otro jugador.
Como elegir el sitio debe siempre el jugador segundo, entonces, al final no quedara el sitio para sus figuras, y el juego gana el primero.
Volver