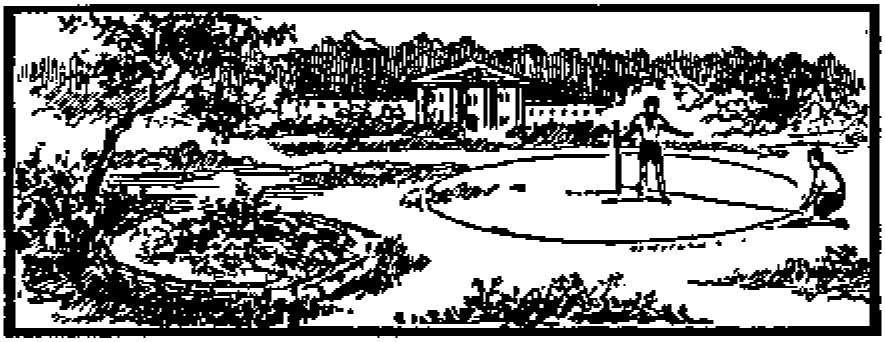
GEOMETRÍA RECREATIVA
SEGUNDA PARTE
ENTRE PASO Y BROMA EN GEOMETRÍA



CAPITULO DUODÉCIMO
ECONOMÍA GEOMÉTRICA

Contenido:

1. Como Pajom compraba la tierra. (una problema del León Tolstoi)

- ¿A que precio será? - dice Pajom.
- El precio que tenemos es único: 1000 rublos por un día.

Pajom no había entendido.

- ¿Cómo es esta medida, un día? ¿Cuántos diezmos[1] en un día serán?
- Nosotros, dice, no sabemos contar esto. Nosotros vendemos al día; Cuánta tierra dejarás atrás durante el día, toda será tuya, y el precio es 1000 rublos.

Se extrañó Pajom.

- Pero esto, dice, durante el día seria mucha tierra.

El jefe sonríe.

- Toda tuya, pero a condición de que, si no vuelves antes de la puesta del sol al sitio de donde comenzaste la vuelta, pierdes tu dinero.

[1] Diezmo; Diesiatina - es la antigua media rusa de los terrenos, equivalente a 109 Ha

- ¿Pero como, dice Pajom, voy a marcar, por donde voy a pasar?
- Nosotros estaremos en el sitio que te guste más; nosotros estaremos quietos y tu caminas, hazlo en círculo, y coge contigo un rascador y, marcas donde sea necesario, en las esquinas haz los agujeros; luego nosotros de una esquina a otra pasaremos con el arado. Cualquier circulo es tuyo, lo único, hasta la puesta del sol tendrás que volver al sitio de donde empezaste. Todo lo que dejes atrás será tuyo.

Los *baskirios* se fueron. Prometieron volver mañana con el amanecer al mismo sitio.

* * *

Vinieron todos al amanecer. El jefe se acercó e indicó con la mano a Pajom.
- Aquí esta, le dice, todo alrededor es mío. Elige cualquier lugar.

El jefe puso su gorra zorruna en la tierra.
- Aquí estaré esperándote, dice, esta será la primera marca. Desde aquí vete y vuélvete por aquí. Todo lo que dejes atrás, todo tuyo será.

Figura 173. «Corre Pajom al máximo de sus fuerzas, y el sol está acercándose al horizonte».

Con el primer rayo del sol cogió al hombro el rascador y comenzó su viaje Pajom por la estepa.

Aun se alejó a una *vierst*, se paró e hizo un agujero. Se alejó todavía mas e hizo otro agujero.

Se había pasado cinco *vierst*. Miró al sol, era hora de desayuno. “Dejé como un atelaje, pensó Pajom. Durante el día hay cuatro, aun es pronto para girar» y se fue recto.

«Ahora, piensa, en este lado he cogido demasiado; Tengo que girar» Se paró, excavó otra vez un agujero y tomó a la izquierda.

Se alejó bastante por el mismo lado, tomó la otra esquina. Echó un vistazo a la colina; se mareaba por el calor que hacía, a lo lejos se dejaba ver la gente. «Ahora, piensa, he cogido demasiado de largo, este lado lo voy a tomar mas corto». Inició el tercer lado. Miró al sol, se acerca el mediodía, el tercer lado lo dejo solamente en dos *verst*. Y hasta el sitio inicial

los mismos 15 *verst*. «No, piensa, aunque salga un terreno torcido, tengo que llegar al tiempo».
Excavó un agujero Pajom e hizo el ultimo giro, caminando hacia la colina.
Camina recto hasta la colina y de pronto empezó sentirse mal. Necesitaba tomar un descanso, pero no puede, no llegará antes de la puesta de sol. El sol esta acercándose al horizonte.
Camina Pajom; difícil es para él, pero se apura aún más. Camina, camina, aun está lejos el fin; trotó… corrió, la camisa, el pantalón se pegan al cuerpo por el sudor y la boca esta seca. El pecho se hincha como fuelle de fragua, el corazón latía como martillo.
Corre Pajom, gastando a las últimas fuerzas, y el sol mas y más se acerca al horizonte. Ahora mismo desaparecerá (dibujo 173).
El sol está cerca y el sitio tampoco está lejos. Ve la gorra zorruna encima de la tierra y el jefe está sentado en el suelo.
Miró Pajom al sol, cómo el sol estaba tocando la tierra, y poco a poco desapareciéndose.
Aumento sus fuerzas Pajom, le dio un suspiro, se subió a la colina. Ve la gorra. Se le doblaron las piernas y se ha caído al suelo, con manos traspiradas, toca la gorra.
- ¡Qué muchacho! - grito el jefe: - ¡Cuanta tierra ha ganado!
Se acerco un trabajador, quiso ayudar a levantarse, pero ve la sangre en la boca, el hombre esta muerto…”

Problema (de León Tolstoi):
Dejaremos aparte el triste fin de la historia y vamos a examinar la parte geométrica de esa historia. Podemos encontrar sobre datos dispersos en la historia, ¿cuantos diezmos de tierra se ha recorrido Pajom? La tarea a primera vista se parece incumplida, se solucionará, sin embargo, bastante fácil.

Solución
Con mucha atención otra vez leemos la historia y obteniendo los datos geométricos, es fácil de asegurarse, que los datos obtenidos son suficiente para responder a esa pregunta.
Podemos dibujar un plano del terreno echo por Pajom.
En primer lugar, está claro, que Pajom ha recorrido sobre lados de un rectángulo. Sobre primer lado leemos:
“He dejado atrás cinco *verst*… Voy a pasar a otros cinco más; Luego tomare a la izquierda…”
Entonces, el primer lado del rectángulo tenía una longitud de mas o menos 10 *verst*.
Sobre el segundo lado, marcado el ángulo recto con el primer lado, no se dice nada.
La longitud de tercer lado, evidentemente, perpendicularmente al otro, se dice a continuación: «Sobre tercer lado había recorrido solamente dos *verst*».
Esta dada, por supuesto, la cuarta parte del rectángulo: «Hasta el fin los mismos cinco verst»[2].

[2] Aunque aquí no esta claro como ha podido el Pajom distinguir la gente de aquella distancia

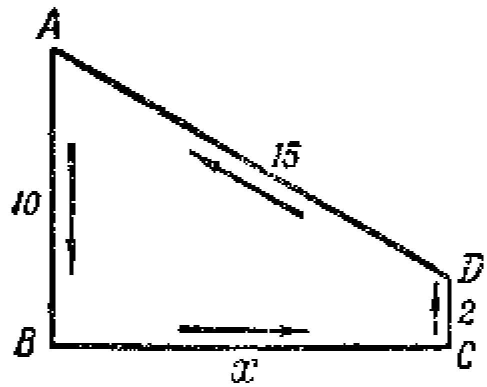


Figura 174. El camino de Pajom

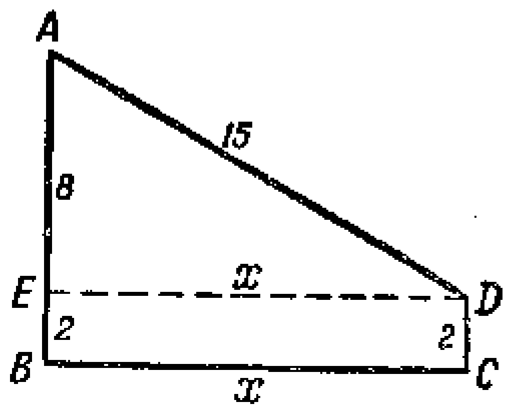


Figura 175. Especificación del camino.

Con estos datos podemos dibujar un plano del terreno recorrido por Pajom (figura 174). En el rectángulo obtenido *ABCD* en lado *AB = 10 verst*; *CD = 2; AD = 15 verst*; Los ángulos *B* y *C* - son rectos. La longitud *x* del lado incógnito *BC* es fácil de calcular, si pasamos desde *D* una perpendicular *DE* hacia *AB* (figura 175). Luego en el triángulo rectángulo *AED* nosotros ya sabemos un cateto *AE = 8 verst* y hipotenusa *AD = 15 verst.* El cateto incógnito

$$ED = \sqrt{15^2 - 8^2} = 13 \text{ verst}$$

Entonces el segundo lado tenia la longitud de *13 verst.* Evidentemente, Pajom se había equivocado, tomando el segundo lado más corto, que el primero.

Como vemos, con la certeza dibujar el plano de aquel terreno, el que ha recorrido el Pajom. Es cierto, Tolstoi había tenido delante un dibujo semejante al dibujo 174, cuando estuvo escribiendo esa historia.

Ahora resulta fácil a encontrar la superficie del trapecio *ABCD,* formado por el rectángulo *EBCD* y por el triángulo rectángulo *AED.* Ella es:

$$2 \times 13 + \frac{1}{2} \times 8 \times 13 = 78 \text{ verst}^2$$

El cálculo sobre la formula del trapecio nos arroja el mismo resultado:

$$\frac{AB + CD}{2} \times BC = \frac{10 + 2}{2} \times 13 = 78 \text{ verst}^2$$

Habíamos encontrado, que Pajom ha recorrido un terreno espacioso con una superficie de *78 verst cuadrados,* más o menos *8.000* diezmos. Una diezma era equivalente a *12 copecs.*
Volver

2. Trapecio o rectángulo
Problema:
Durante el día más fatídico en su vida Pajom había recorrido 10 + 13 +2 + 15 = 40 verst, caminando sobre los lados de un trapecio. Su intención principal era caminar sobre los lados de un rectángulo; el trapecio le ha salido por la causalidad, es el resultado de un cálculo mal hecho. Es curioso: ¿Ha ganado o ha perdido, cuando su terreno ha resultado como un trapecio? ¿En qué caso él podría haber recibido el mayor terreno?

Solución
A los rectángulos con un contorno de *40 verst* podrá ser mucho, y cada uno tiene su superficie distinta. Aquí están los ejemplos:

14 ´ 6 = 84 verst cuadrados
13 ´ 7 = 9 »
12 ´ 8 = 96 »
11 ´ 9 = 99 »

Vemos, que para todas estas figuras, con el mismo perímetro de *40 verst,* la superficie es mayor, que para nuestro trapecio.
Sin embargo, son evidentes y otros rectángulos con perímetro de *40 verst,* cuya superficie es menor, que para el trapecio:

18 ´ 2 = 26 verst cuadrados
19 ´ 1 = 19 »
19 ½ ´ ½ = 9 »

Por lo tanto, no podemos dar la respuesta justa para este problema. Hay rectángulos con superficie mayor, que el trapecio, pero hay también con la menor superficie, con el mismo contorno. Aunque podemos dar una respuesta justa para la pregunta: ¿Cuál de todas figuras rectangulares con el perímetro dado tendrá la superficie más grande? Comparando nuestros rectángulos, anotamos, que cuando hay menor diferencia entre los lados, entonces la superficie del rectángulo es la mayor. A continuación terminando, que cuando esa diferencia no existe, es decir, cuando el rectángulo se convierte al cuadrado, la superficie alcanzara la mayor cantidad. Luego ella será equivalente a *10 ´ 10 = 100 verst cuadrados.* Es fácil de ver, que el cuadrado realmente supera por su superficie al cualquier otro rectángulo del mismo perímetro. Pajom tenia que caminar sobre los lados de un cuadrado para conseguir un terreno de una superficie más grande posible, sobre *22 verst cuadrados* mas, que él había logrado.
Volver

3. Una propiedad excelente del cuadrado
La excelente propiedad del cuadrado es incluir dentro de sus límites la mayor superficie en comparación con otros rectángulos del mismo perímetro. Haremos una demostración justa de esta posición.
Llamaremos *P* el perímetro de la figura rectangular. Si el cuadrado tiene el mismo perímetro P, entonces cada uno de sus lados tendría que ser equivalente a *P/4.*

Demostraremos, que acortando unos de sus lados sobre tal cantidad *b* sobre la misma prolongación del lado próximo, nosotros obtendremos un rectángulo con el mismo perímetro, pero con la menor superficie. Dicho de otra manera, demostraremos, que la superficie $\left(\frac{P}{4}\right)^2$ del cuadrado es mayor de la superficie $\left(\frac{P}{4}+b\right)\left(\frac{P}{4}-b\right)$ del rectángulo:

$$\left(\frac{P}{4}\right)^2 > \left(\frac{P}{4}+b\right)\left(\frac{P}{4}-b\right)$$

Como el lado de derecho de esa desigualdad $\left(\frac{P}{4}\right)^2 - b^2$, entonces, todas las formulas tomaran el aspecto

$$0 > - b^2 \text{ ó}$$
$$b^2 > 0.$$

Pero es evidente la ultima desigualdad: El cuadrado de cualquier cantidad, negativa o positiva, es mayor que *0.* Por lo tanto, es correcta la desigualdad principal, la que conducía a nosotros hasta aquí.

O sea, el cuadrado tiene la mayor superficie de todos rectángulos con el mismo perímetro. De aquí se deduce, además, entre todas figuras rectangulares con las mismas superficies, un cuadrado tiene la *menor superficie.* Podemos convencernos por el siguiente razonamiento. Supongamos, que no es cierto y que existe un tal rectángulo *A,* el que con la superficie equivalente al cuadrado *B* tiene el perímetro menor, que él. Luego, dibujando un tal cuadrado *C* con mismo perímetro como tiene rectángulo *A,* obtenemos el cuadrado, que tiene la superficie mayor que *A* y, por lo tanto, mayor que el cuadrado *B.* ¿Entonces, que tenemos? Que el cuadrado *C* tiene el perímetro menor que el cuadrado *B*, pero la superficie es mayor que él. Esto, naturalmente, es imposible: Como un lado de cuadrado *C* es menor, de un lado de cuadrado *B,* entonces la superficie tiene que ser menor. Entonces, no es posible la existencia del rectángulo *A,* el que con la misma superficie tiene el perímetro menor que del cuadrado. Dicho de otra manera, de todos los rectángulos con la misma superficie, el menor perímetro la tiene el cuadrado.

Los conocimientos de esta propiedad del cuadrado podrían ser una buena ayuda para Pajom, poder calcular sus fuerzas y conseguir un terreno rectangular de mayor superficie. Sabiendo, que pudo caminar durante todo el día, sin ningún esfuerzo, digamos *36 verst*, podría seguir por el lado de *9 verst* del cuadrado y a tardecer seria el poseedor de un terreno de *81 verst cuadrados, -* es como *3 verst cuadrados* mas que el que había conseguido con un final mortal. Y, al contrario, si él había tenido un limite definido de la superficie para un terreno rectangular, por ejemplo, a *36 verst cuadrados,* entonces él podría lograr el resultado con esfuerzo mínimo, andando sobre los lados del cuadrado, de un lado a *6 verst.*

Volver

4. Los terrenos de otra forma

Puede ser, que para Pajom fuera más rentable conseguir un terreno no de una forma rectangular, sino cualquiera otra, quizás triangular, pentagonal, cuadrado y etc.

Esta pregunta tiene que ser examinada por la matemática; pero, por ciertas razones, no vamos a entrar en esto, solamente vamos a demostrar a los resultados.

En primer lugar, podemos demostrar, que de *todos cuadriláteros* con el mismo perímetro la más mayor superficie pertenecerá al cuadrado. Por eso, deseando tener un terreno cuadrilateral, con ningún artificio Pajom no podría alcanzar más de *100 verst cuadrados* (calculando, que su carrera diaria máxima es - *40 verst*).

En segundo lugar: Podemos demostrar, que el cuadrado tiene la mayor superficie, de cualquier triángulo con el mismo perímetro. Un triángulo equilátero con el mismo

40/3 =13 1/3 *verst*

perímetro tiene un lado y la superficie (con la formula $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (*S* es la superficie, *a* es el lado)

$$\frac{1}{4}\left(\frac{40}{3}\right)^2\sqrt{3} = 77 \text{ verst cuadrados}$$

Es decir, es menor de aquel trapecio que había recorrido Pajom. A continuación (ver «Un triángulo con mayor superficie») será demostrado, que de todos triángulos con el mismo perímetro, el triángulo *equilátero* tiene la mayor superficie. Entonces, si además este mayor triángulo tiene la superficie menor que la superficie del cuadrado, entonces todos otros triángulos del mismo perímetro son menores de superficie, que el cuadrado.
Pero si vamos a comparar la superficie de cuadrado con superficie del pentágono, hexágono y etc. con el mismo perímetro, entonces aquí su propiedad se terminará: un pentágono regular tiene mayor superficie, un hexágono aun mayor y etc. Fácil de convencerse teniendo como ejemplo un hexágono regular. Con el perímetro de *40 verst* su es lado 40/6 y superficie (por la formula $S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$) es $S = \frac{3}{3}\left(\frac{40}{6}\right)\sqrt{3}$ verst cuadrados
Sabiendo y eligiendo para su terreno la forma de hexágono regular, él con el mismo esfuerzo podría alcanzar la superficie de *115 - 78,* es decir de *37 verst cuadrados* mas, que en realidad, y de *15 verst cuadrados* mas, que da el terreno cuadrado (pero para esto tendría que haber empezado el viaje con un instrumento goniométrico).

***Problema**:*
Cogiendo las seis cerillas necesita hacer una figura con mayor superficie.

Solución.
Con seis cerillas podemos construir varias figuras distintas: un triángulo equilátero, un rectángulo, hexágonos irregulares y por fin - un hexágono regular. Un geómetra, sin comparar entre si las superficies de estas figuras, sabe muy bien, cual figura tiene la mayor superficie es hexágono regular.
Volver

5. Las figuras con mayor superficie
Podemos demostrar geométricamente, que la mayor cantidad de los lados de un polígono regular, formara la mayor superficie con la misma longitud de los lados. Y la mayor superficie con un perímetro dado inscribe la circunferencia. Si Pajom hubiera caminando sobre una circunferencia, entonces, recorriendo los mismos *40 verst,* él pudiera conseguir la superficie de

$$p \times \left(\frac{40}{2p}\right)^2 = 127 \text{ verst cuadrados}$$

Con la mayor superficie sobre un perímetro dado no puede ganar ninguna otra figura mas, es igual, la rectilínea o curvilínea.

Permítanme detenerme un poco más en esta propiedad sorprendente del circulo, como es la de formar dentro de sus limites la mayor superficie, que cualquiera otra figura, teniendo el mismo perímetro. Puede ser, que algunos lectores tengan curiosidad de saber de qué manera se demuestran las situaciones semejantes. Luego vamos a demostrar, la verdad es que la demostración no es clásica, esta propiedad del circulo, presentada por el matemático Yakov Shteyner. El texto es bastante largo, y si Uds. encuentran demasiado molesto, pueden dejar pasar, sin preocuparse de no entender la siguiente parte.

Se necesita demostrar, que la figura, teniendo la mayor superficie con un perímetro dado, será el círculo. Antes de todo estableceremos, que la figura buscada tiene que ser convexa. Esto significa, cualquier cuerda debe estar situada totalmente en dentro de la figura.

Tenemos una figura *AaBC* (figura 176), teniendo la cuerda externa *AB.* Cambiaremos la cuerda *a* por la cuerda *b,* simétricamente con ella. Con este cambio el perímetro de figura *ABC* no se cambia, pero la superficie claramente se amplía. Entonces, todas las figuras como *AaBC* no pueden ser las que tienen mayor superficie con el mismo perímetro.

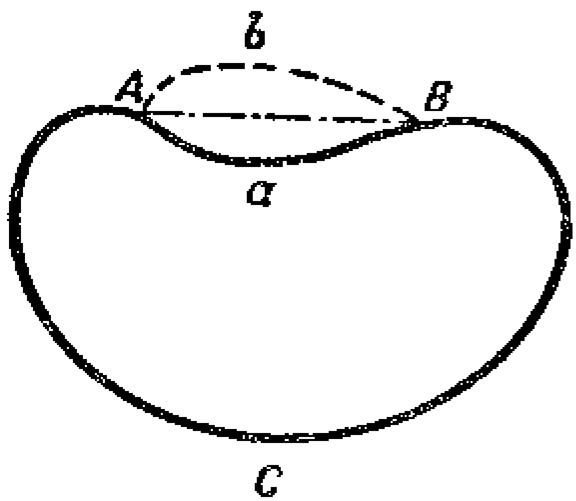


Figura 176. Ordenamos, que la figura con mayor superficie debe ser convexa también y la superficie

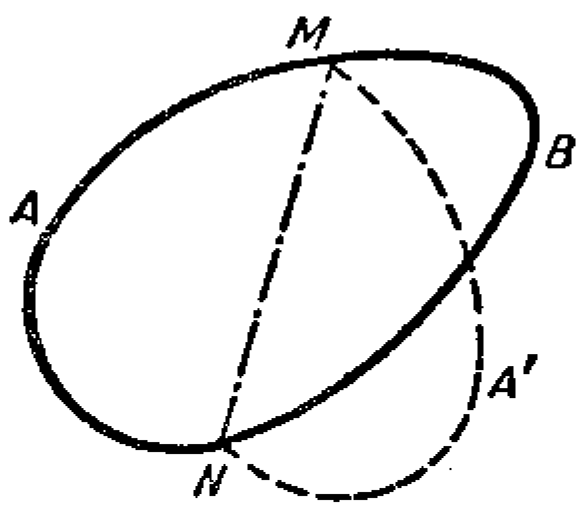


Figura 177. Si la cuerda divide por la mitad del perímetro de una figura convexa de mayor superficie, entonces ella corta por la mitad también a la superficie.

O sea, la figura buscada es *convexa.* Luego podemos adelantar, establecer otra propiedad mas de esta figura: Cualquier cuerda, la que divide por la mitad su perímetro, le corta por la mitad también a la superficie. Sea la figura *AMBN* (figura 177) la buscada, y sea la cuerda *MN* divide su perímetro por la mitad. Demostraremos, que superficie *AMN* es equivalente a la superficie *MBN.* En realidad, si alguna de estas partes fuera mayor de superficie, que la otra, por ejemplo, $AMN > MNB$, entonces, doblando la figura *AMN,* la superficie que es mayor que de la figura principal *AMBN,* donde el perímetro es mismo con ella. Entonces, la figura *AMBN,* donde la cuerda corta el perímetro por la mitad, divide la superficie en dos partes de diferente área, lo que no puede ser posible (es decir, no puede tener la *mayor* superficie con un perímetro dado).
Antes de seguir adelante, demostraremos el siguiente teorema secundario: De todos los triángulos con dos lados conocidos, la mayor superficie la tendrá el que forma con sus lados un ángulo recto. Para demostrar esto, acordamos una expresión trigonométrica de superficie *S* del triángulo con los lados *a* y *b* y el ángulo *C* entre ellos.

$$S = \frac{1}{2} a \times b \times \text{sen}(C)$$

Este termino será, evidentemente, el mayor (sobre los lados conocidos) cuando el *sen(C)* tome su mayor valor, es decir, será equivalente a uno. Pero el ángulo cuyo seno es 1, es el recto. Es todo lo que deberíamos de demostrar.

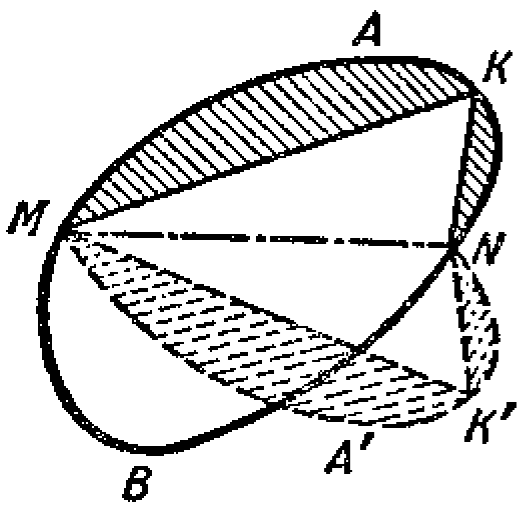


Figura 178. Supongamos la existencia de una figura convexa, que no es un círculo, con la mayor superficie.

Ahora podemos empezar a solucionar el problema principal, demostrando que de todas figuras con el perímetro *p* la de mayor superficie es la circunferencia. Para convencerse, probaremos admitir la existencia de una figura convexa *MANB* y no sea circular (figura 178), la que domina esta propiedad. Pasaremos hasta ella una cuerda *MN,* con la posición simétrica al (*MK¢N*). Anotamos, que figura *MNK¢M* tiene el mismo perímetro y la misma superficie, que la figura principal *MKNM.*

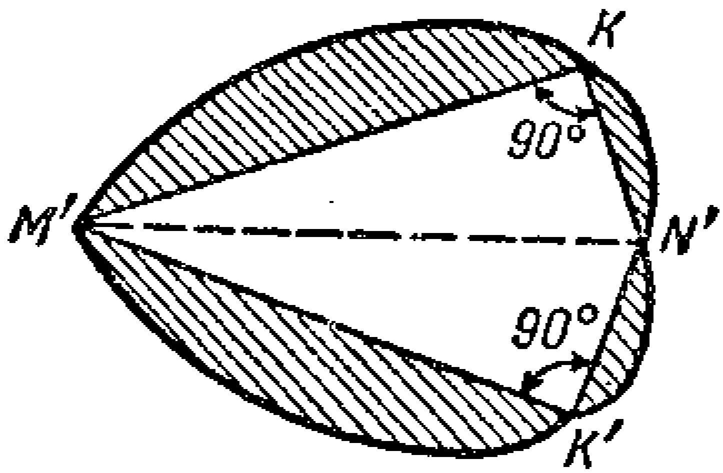


Figura 179. Establecemos que de todas las figuras con el perímetro dado, la mayor superficie es la circunferencia

Como la cuerda *MKN* no es la mitad de circunferencia, entonces encima de ella tendrán que ser situados unos puntos, donde el segmento *MN* se ve no sobre un ángulo recto. Sea bien, *K* - es un punto, *K¢* - es el simétrico al, es decir, los ángulos *K* y *K¢* - no son rectos. Separando (o uniendo) a los lados *MK, KN, MK¢, NK¢,* podemos formar entre ellos un ángulo recto y luego obtendremos los triángulos rectángulos *equivalentes.* Estos triángulos los colocaremos sobre sus hipotenusas como en la figura 179, y unimos en unos sitios correspondientes a los segmentos sombreados. Obtenemos la figura *M¢KN¢K¢,* teniendo el mismo perímetro, que la principal, pero, evidente, con la mayor superficie (por que los triángulos rectángulos *M¢KN¢* y *M¢K¢N¢* tienen la mayor superficie, que los no rectángulos *MKN* y *MK¢N*). Entonces, ninguna otra figura, si no es circulo, no puede tener la mayor superficie con un perímetro dado.
De esta manera sustentado, podemos demostrar que el circulo es la figura que tiene mayor superficie, con un perí metro dado.
Es fácil de demostrar la equidad de una posición: De todas figuras de igual superficie, el circulo es el que tiene el menor perímetro. Observándola, podemos aplicar para el circulo todos los argumentos que antes usamos para el cuadrado (ver «Una propiedad excelente del cuadrado»)
Volver

6. Los clavos

Problema:
¿Qué clavo es más difícil de sacar, el redondo, cuadrado o triangular, si ellos estuviesen clavados a la misma profundidad y tienen la misma superficie del corte transversal?

Solución
Intuitivamente sabemos que el clavo que tiene mayor resistencia a la extracción es aquél que tiene mayor superficie de contacto con la madera ¿Cuál clavo de los tres, tiene la mayor superficie de contacto? Nosotros sabemos, que con las mismas superficies, el perímetro del cuadrado es menor que el perímetro de triángulo, y la circunferencia es menor que el perímetro del cuadrado. Si un lado del cuadrado le asignamos el valor 1, entonces el cálculo deja para estas tres cantidades los valores de *4,53; 4; 3,55.* Por lo tanto, el que se mantiene más fuerte de todos es el clavo triangular.
Sin embargo, estos clavos no fabrican, por lo menos no están a la venta. La causa es que estos clavos son fáciles de doblar y de romper.
Volver

7. Un cuerpo de mayor volumen

Una propiedad semejante al circulo, la tiene la superficie esférica: ella tiene el mayor volumen con una cantidad dada de superficie. Y al contrario, de todos los cuerpos del mismo volumen, el de menor superficie es la esfera.

Estas características juegan el gran papel en la vida práctica. El samovar esférico tiene menor superficie, que el cilindro o de cualquier otra forma, conteniendo la misma cantidad de vasos, y como el cuerpo pierde el calor en función de su superficie, entonces el samovar esférico se enfría mas lento que cualquier otro del mismo volumen. Al contrario, el receptáculo del termómetro se calienta y se enfría más rápido (es decir, cogiendo la temperatura del medio ambiente), cuando tiene la forma de un cilindro y no de esfera.

Por la misma razón el globo terrestre, formado por una capa sólida y el núcleo, debe de reducir su volumen, es decir, endurecerse, estrecharse, por todas causas, transformando la forma de su superficie: Su contenido profundo debe ser estrecho cada vez, cuando su forma inferior sobrevive algún cambio, saliéndose de la esfera. Es posible, que este asunto geométrico esté en una relación estrecha con los terremotos y generalmente con los fenómenos tectónicos; pero sobre eso deben que dar su opinión los geólogos.

Volver

8. El producto de multiplicadores equivalentes

Las tareas, a las que ahora estábamos dedicando el tiempo, se pueden analizar desde su aspecto económico: Sobre el consumo del esfuerzo dado (por ejemplo, caminando 40 verst), y ¿cómo conseguir el mayor resultado (rodeando el terreno más grande posible)? De aquí viene el titulo de una parte del libro: «Economía geométrica». Pero esto es la voluntad de vulgarizador; en matemática los problemas del mismo sentido tienen otro nombre: Problemas sobre «mínimo y máximo». Ellos pueden ser variados por su asunto y por su nivel de dificultad. La mayor parte de los problemas se solucionan únicamente con matemáticas especiales; Pero hay algunos, donde paral solucionarlos es suficiente algunos conocimientos elementales. A continuación vamos a examinar un par de problemas semejantes, los que vamos a solucionar, usando una propiedad curiosa, como hacer derivar multiplicadores equivalentes.

Para casos de dos multiplicadores con esta propiedad ya se conoce. Nosotros sabemos, que la superficie del cuadrado es mayor que la superficie de cualquier rectángulo del mismo perímetro. Si traducimos esa situación geométrica a la lengua aritmética, va a significar lo siguiente: Cuando es necesario dividir el numero sobre dos partes, donde su producto será el mayor, entonces hay que dividir por la mitad. Por ejemplo, de todos productos

13 ´ 17
16 ´ 14
12 ´ 18
11 ´ 19
10 ´ 20
15 ´ 15

y etc., la suma de los multiplicadores es *30,* el mayor será *15 ´ 15,* aun si comparamos los productos de números fraccionarios ($14\,^1/_2$ ´ $15\,^1/_2$ y etc.).

Es correcto también para los productos de tres multiplicadores, teniendo la suma constante: Su producto alcanzara la mayor cantidad, cuando multiplicadores son equivalentes entre si. Eso se deduce del precedente. Sean tres multiplicadores $x, y, z,$ su suma es $a;$

$$x + y + z = a.$$

Supongamos, que x e y no son equivalentes entre si. Si cambiamos cada uno de ellos por media suma $\frac{x+y}{2}$, entonces la suma de multiplicadores no cambiará:

$$\frac{x+y}{2}+\frac{x+y}{2}+z=x+y+z=a$$

Con acuerdo con anterior

$$\frac{x+y}{2}\times\frac{x+y}{2}>x\times y$$

Entonces el producto de tres multiplicadores

$$\frac{x+y}{2}\times\frac{x+y}{2}\times z$$

es el mayor del producto de *xyz:*

$$\frac{x+y}{2}\times\frac{x+y}{2}\times z>x\times y\times z$$

en general, si entre multiplicadores *xyz* hay algunos que son desiguales, entonces, siempre podemos encontrar a los números, los que sin cambiar la suma total, den el mayor producto, de *xyz.* Y solamente cuando todos tres multiplicadores son equivalentes, cumplir el mismo cambio no es posible. Por lo tanto, sobre $x + y + z = a$, el producto *xyz* será el mayor cuando

$$x = y = z$$

Aprovecharemos el conocimiento de esta propiedad de multiplicadores equivalentes, para resolver problemas muy interesantes.
Volver

9. Un triángulo con mayor superficie
Problema:
¿Qué forma debe de tomar el triángulo, para que tenga la mayor superficie con la suma de sus lados dados?
Nosotros ya tenemos anotado anteriormente (ver «Terrenos de otra forma»), que esta propiedad es sostenida por el triángulo equilátero. ¿Pero como podemos demostrarlo?

Solución.
La superficie *S* del triángulo con lados *a, b, c* y con el perímetro $a + b + c = 2p$ se expresa, como sabemos del curso de geometría, así

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

de donde

$$\frac{S^2}{p}=(p-a)(p-b)(p-c)$$

La superficie *S* del triángulo será mayor, cuanto mayor sea la cantidad su cuadrado S^2, S^2

o expresión S^2/p, donde *p,* es el semiperímetro, y de acuerdo con la condición del problema, es constante. Pero como ambas partes de igualdad reciben la mayor significativo simultáneamente, entonces la pregunta tiene su expresión en cuál condición del producto

$$(p - a)\ (p - b)\ (p - c)$$

será el mayor. Anotando, que la suma de estos tres multiplicadores es la cantidad constante,

$$p - a + p - b + p - c = 3p - (a + b + c) = 3p - 2p = p,$$

terminaremos, que su producto alcanzara la mayor cantidad cuando los multiplicadores sean equivalentes, es decir, cuando se cumple la igualdad

$$p - a = p - b = p - c$$

de donde

$$a = b = c.$$

Entonces un triángulo tendrá la mayor superficie con el perímetro dado, cuando sus lados serán equivalentes entre si.
Volver

10. La viga más pesada

Problema:

De un madero de forma cilíndrica necesita aserrar una viga de mayor peso. ¿Cómo vamos a actuar?

Solución

La tarea, evidentemente, se expresa inscribiendo un rectángulo con mayor superficie dentro de un circulo. Aunque, antes de todo dicho nuestros lectores estén preparados a contestar, que ese rectángulo debe ser un cuadrado, pero hay que demostrarlo. Llamaremos un lado del rectángulo buscado (figura 180) a través de *x;* Luego el otro se expresa a través de $\sqrt{R^2 - x^2}$, donde *R* es el radio del corte circular del madero.

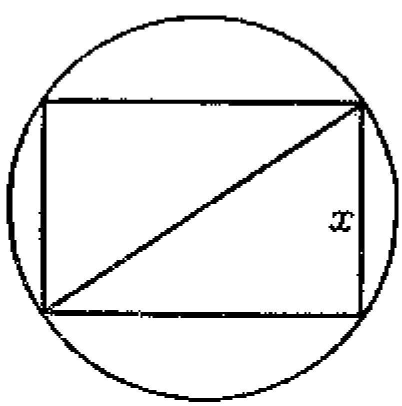


Figura 180. Para la tarea sobre una viga de mayor peso

La superficie del rectángulo

$$S = x \times \sqrt{R^2 - x^2}$$

de donde

$$S^2 = x^2 \times \left(4R^2 - x^2\right)$$

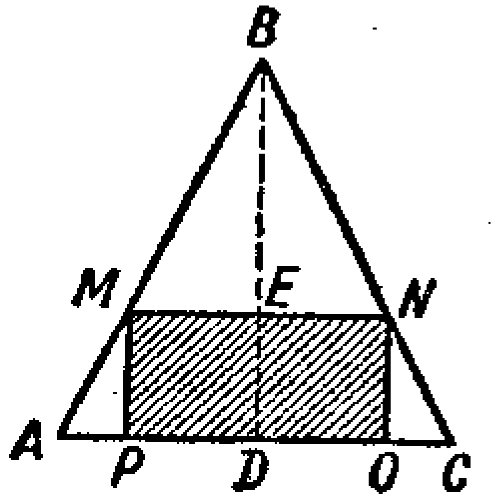


Figura 181. Dentro del triángulo hay que inscribir un rectángulo de mayor superficie.

Como la suma de los multiplicadores x^2 y $4R^2 - x^2$ es la cantidad constante $(x^2 + 4R^2 - x^2 = 4R^2)$, entonces su producto S^2 será el mayor sobre $x^2 = 4R^2 - x^2$, es decir sobre $x = R\sqrt{2}$. Entonces, luego alcanzara la mayor cantidad de *S,* es la superficie del rectángulo buscado. O sea, un de los lados del rectángulo con la mayor superficie es $R\sqrt{2}$, es decir al lado del cuadrado inscrito. La viga tiene el mayor volumen, cuando su corte es cuadrado, inscrito en el corte del madero cilíndrico.

[Volver]

11. De un triángulo de cartón

Problema:

Tenemos un pedazo de cartón de forma triangular. Necesita cortarlo paralelamente a su base y a la altura, un rectángulo de mayor superficie.

Solución.

Sea *ABC* ese triángulo (figura 181), y *MNOP* - es aquel rectángulo, el debe quedar después del corte.

Por semejanza de los triángulos *ABC* y *NBM* tenemos

$$\frac{BD}{BE} = \frac{AC}{NM}$$

De donde

$$NM = \frac{BE \times AC}{BD}$$

Llamando uno de los lados *NM* del rectángulo buscado a través de *y,* su distancia *BE* desde el vértice del triángulo a través de *x,* la base *AC* del triángulo dado a través de *a,* y su altura *BD* a través del *h,* escribimos la formula anteriormente recibida en esta presencia

$$y = \frac{ax}{h}$$

La superficie *S* del rectángulo buscado *MNOP* es:

$$S = MN \times NO = MN \times (BD - BE) = (h - x) \times y = (h - x) \times \frac{ax}{h}$$

Por lo tanto

$$\frac{Sh}{a} = (h - x) \times x$$

La superficie *S* será la mayor, cuando el producto *Sh/a* sea mayor también, por lo tanto cuando alcance la mayor cantidad el producto de los multiplicadores *(h - x)* y *x.* Pero la suma *h - x + x = h* , es la cantidad constante. Entonces, su producto es máximo, cuando

h - x = x,

donde

x = h/2

Ahora sabemos, que el lado *NM* del rectángulo buscado pasa a través de la mitad de altura del triángulo y, por lo tanto, se une los medios de sus lados. Entonces, esta parte del rectángulo es a/2 ¾ , y la otra es h/2.

Problema:
Un hojalatero tuvo que prepararlo de un pedazo cuadrado de hojalata de 60cm de anchura, a una caja con el fondo cuadrado sin la tapa y con una condición: La caja tendrá que ser de mayor espaciosidad. Hojalatero tardo bastante tiempo, buscando de que anchura deben de ser los bordes, pero al final no encontró la solución justa (dibujo 182).
¿Puede ser, que el lector era capaz de sacar nuestro hojalatero de esa dificultad?

Figura 182. Problema de hojalatero

Solución.

Sea que la anchura de bandas dobladas es x (dibujo 183). Luego la anchura del fondo cuadrado será $60 - 2x$; el volumen v de la caja se expresará por el producto

$$v = (60 - 2x)(60 - 2x)x.$$

¿Cuál x dará a este producto el mayor valor? Si la suma de los tres multiplicadores fuera constante, el producto será mayor en el caso de su igualdad. Pero aquí la suma de multiplicadores es

$$60 - 2x + 60 - 2x + x = 120 - 3x$$

no es la cantidad constante, porque varía con x. Sin embargo no es difícil conseguir aquello para que la suma de los tres multiplicadores sea constante: Para esto es suficiente multiplicar ambas partes de la igualdad por *4.* Obtenemos:

$$4v = (60 - 2x)(60 - 2x)4x.$$

La suma de los multiplicadores es equivalente a

$$60 - 2x + 60 - 2x + 4x = 120,$$

a la cantidad constante. Entonces, el producto de estos multiplicadores consigue la mayor cantidad cuando

$$60 - 2x = 4x,$$

de donde

$$x = 10.$$

Entonces el volumen v alcanza su máximo su máximo. Entonces, la caja saldrá de mayor volumen, si doblamos *10 cm* de hojalata. Este mayor volumen es *40 ´ 40 ´ 10 = 16.000* cm^3. Doblando sobre un centímetro menos o más, nosotros en ambos casos disminuimos el volumen de la caja. Es cierto,

9 ´ 42 ´ 42 = 15900 cm^3,
11 ´ 38 ´ 38 = 15900 cm^3,

como vemos, es menos de *16.000 centímetros cúbicos*[3]

[3] 1 Solucionando este problema, encontraremos que con la anchura a de la hoja cuadrada necesita, para obtener la caja de mayor volumen, doblar las barras con anchura de $x = a/6$, porque el producto

$(a - 2x)(a - 2x)\ x$, o $(a - 2x)(a - 2x)4x$ - es el mayor sobre $a - 2x = 4x$

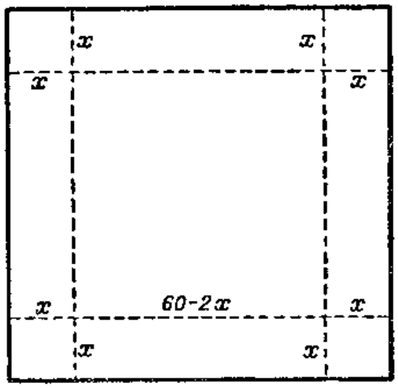


Figura 183. Solución de problema del hojalatero

Volver

12. Problema del tornero

Problema:

A un tornero le han dado un cono y le han encargado de tornear un cilindro, gastando la menor cantidad del material (figura 184). El tornero comenzó meditar sobre la forma del cilindro buscado: haciendo mas alto, pero estrecho (figura 185, a la izquierda), o al contrario, ancho, pero más bajito (figura 185, a la derecha). Al final no pudo resolver el problema. ¿Cómo debería actuar el tornero?

Figura 184. Problema del tornero

Solución

La tarea necesita atención geométrica. Sea bien *ABC* (figura 186), es la sección cónica, *BD* - es su altura, la que llamaremos *h;* El radio de su base *AD* = *DC* le llamaremos *R.* El cilindro, que podamos tornear del cono, tiene la sección *MNOP.* Encontraremos, a qué distancia *BE* = *x* del vértice *B* debe de estar la base encima del cilindro, para que su volumen fuere el mayor.

El radio del cilindro *(PD* o *ME)* es fácil de encontrar a través de proporción

$$\frac{ME}{AD} = \frac{BE}{BD}, \text{ es decir } \frac{r}{R} = \frac{x}{h}$$

de donde

$$r = \frac{Rx}{h}$$

La altura *ED* del cilindro *h - x.* Por lo tanto su volumen es

$$v = \pi\left(\frac{Rx}{h}\right)^2 (h - x) = \pi \frac{R^2 x^2}{h^2} (h - x)$$

de donde

$$\frac{vh^2}{\pi R^2} = x^2 (h - x)$$

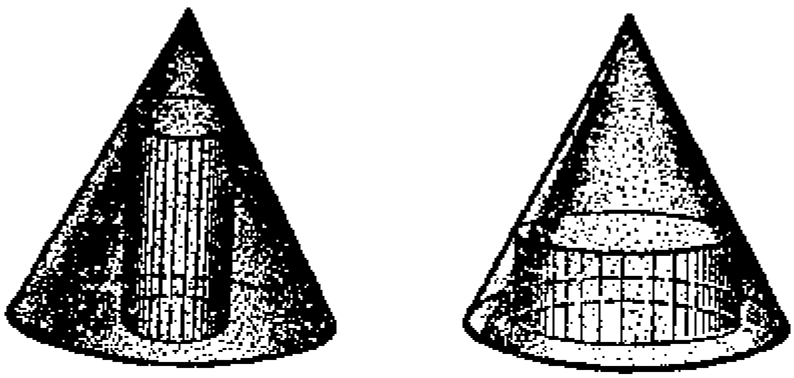


Figura 185. De un cono es posible tornear un cilindro alto pero estrecho, o ancho pero bajito. ¿En qué caso se gastará menos material?

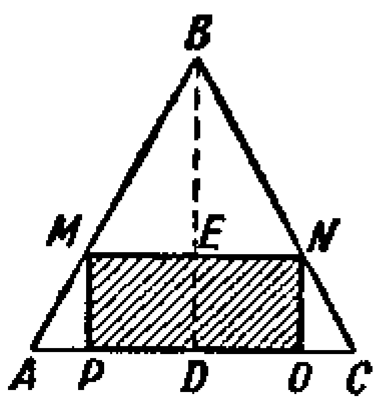


Figura 186. Sección cónica y cilíndrica

En la expresión $\frac{vh^2}{\pi R^2}$, las cantidades *h,* π y *R* son constantes y solamente *v* es la cantidad variable. Deseamos encontrar aquel *x,* con el cual *v* se hace el mayor. Pero, evidentemente, que *v* será mayor en el mismo tiempo con $\frac{vh^2}{\pi R^2}$, es decir con x^2 *(h - x).*

¿Cuándo será mayor esta ultima expresión? Aquí tenemos a los tres multiplicadores variables *x, x* y *(h - x).* Si su suma fuera constante, entonces el producto seria mayor, cuando los multiplicadores sean equivalentes entre si. Esta constancia de la suma es fácil de conseguir, si ambas partes de la última igualdad la multiplicamos por *2.* Vamos a ver que obtendremos:

$$2\frac{vh^2}{\pi R^2} = 2x^2(h - x)$$

Ahora tres multiplicadores de la parte derecha tienen la suma constante

$$x + x + 2h - 2x = 2h.$$

Por lo tanto, su producto será el mayor, cuando todos los multiplicadores son equivalentes, es decir

$$x = 2h - 2x$$
$$x = 2h/3$$

Luego la expresión $\frac{vh^2}{\pi R^2}$ seria mayor con ella el volumen del cilindro *v* también seria mayor.
Ahora sabemos, como tendría que ser torneado el cilindro: su base encima tiene que distar desde la cima, *2/3* de su altura.
Volver

13. ¿Cómo se prolonga una tabla?
A veces en un taller o en casa, cuando queremos preparar una u otra cosa, las medidas del material, que tenemos a mano no coinciden a las que necesitamos.
Entonces tenemos que cambiar las medidas del material con un tratamiento, que le corresponda, y podamos conseguirlo con ayuda de viveza geométrica y del calculo.

Figura 187. Como se alarga una tabla por el medio de tres cortes y una encoladura.

Imaginen un caso: Uds. para preparación de un estante para los libros necesitan una tabla de las medidas definidas, exactamente *1 m* de longitud, *20 cm* de ancho, pero Uds. tienen una tabla de menor longitud, pero más ancha: Por ejemplo, *75 cm* de longitud y *30 cm* de anchura (figura 187 a la izquierda).

¿Cómo vamos a actuar?
Es posible que a lo largo de esta tabla podamos cortar un listón de tres trozos iguales con longitud de *25 cm* cada una y con dos de ellas alargar la tabla (figura 187 abajo).
Esta solución de problema no es ahorrable de punto de vista de cantidad de operaciones (tres cortes y tres pegas) y no responde a las exigencias de solidez (allí donde las tabletas están pegadas a la tabla).

Problema:
Encontrar un modo de prolongar una tabla dada por medio de tres cortes y solamente una encoladura.

Solución.
Tenemos que aserrar la tabla (figura 188) *ABCD* diagonalmente *(AC)* y acercar una mitad (por ejemplo, *ABC)* a lo largo de diagonal paralelamente a si mismo sobre cantidad C_1E, igualmente a la longitud faltante, es decir *25 cm;* La longitud total de las dos mitades será equivalente a *1 m.* Ahora estas dos partes hay que pegar sobre la línea AC_1 y los que sobra (los triángulos sombreados) hay que cortarlos.

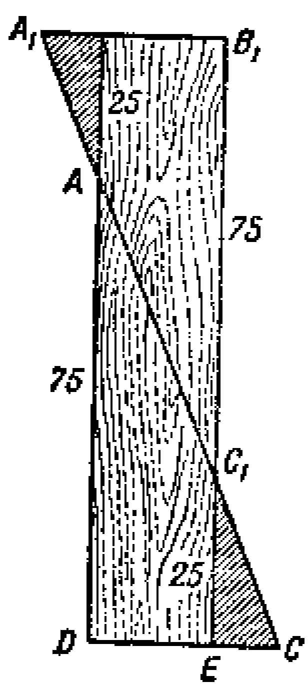


Figura 188. Solución de un problema sobre la prolongación de una tabla

En realidad por la semejanza de los triángulos *ADC* y C_1EC tenemos:

$$AD : DC = C_1E : EC$$

de donde

$$EC = \frac{DC}{AD} \times C_1E$$

$$EC = \frac{30}{75} \times 25 = 10 \text{ cm}$$

$$DE = DC - EC = 30 \text{ cm} - 10 \text{ cm} = 20 \text{ cm}.$$

Volver

14. Un camino más corto

Resumiendo vamos a ver como se soluciona un problema sobre «máximo y mínimo», con ayuda de una simple construcción geomé trica.

Problema:

En la orilla de un río necesita construir un deposito de agua, desde el que agua correría por tuberías a los pueblos A y B (figura. 189).

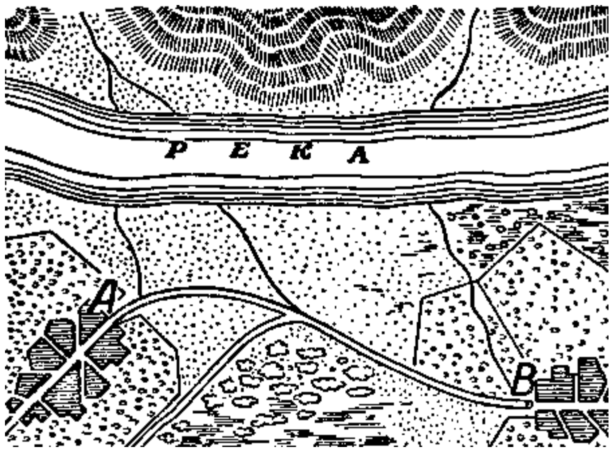


Figura 189. Para el problema sobre deposito de agua.

¿En que sitio hay que construir, para que la longitud total de las tuberías desde el deposito hasta ambos pueblos sea la mínima?

Solución

El problema tiene su expresión en búsqueda del camino mas corto desde el punto *A* hasta orilla y luego hasta el punto *B.*

Supongamos, que el camino buscado es *ACB* (figura 190). Doblaremos el dibujo sobre *CN.* Obtendremos el punto *B¢.* Si el *ACB* es camino mas corto, entonces, como *CB¢* = *CB,* el camino *ACB¢* tendrá ser mas corto de cualquier otro (por ejemplo, de *ADB¢*).

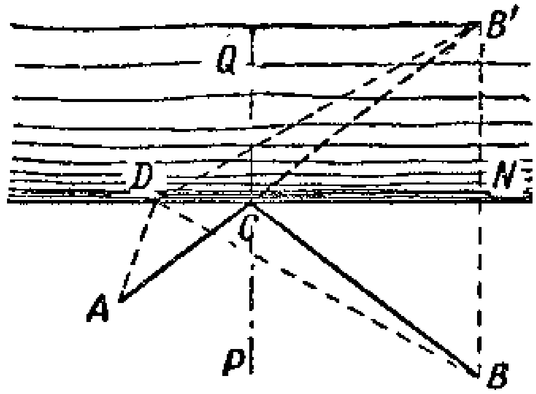


Figura 190. La solución geométric a de un problema sobre elección del camino más corto.

Entonces, para la búsqueda del camino mas corto tenemos que encontrar un punto *C* de intersección de una recta AB' con la línea de la orilla. Luego, uniendo *C* con *B,* encontraremos ambas partes del camino mas corto desde el *A* hacia el *B.*
Pasando en el punto *C* una perpendicular hacia *CN,* es fácil de ver, que los ángulos *ACP* y *BCP,* formados por ambas partes del camino más corto con esta perpendicular, son equivalentes entre sí

$$\angle ACP = \angle B'CQ = \angle BCP$$

Eso es, como sabemos, la Ley de un rayo de la luz, el que se refleja en un espejo: Ángulo de incidencia es equivalente al ángulo de reflexión. De aquí se deduce, que un rayo de luz, reflejado elige el camino *más corto,* la conclusión conocida hace dos mil años, por un físico y geómetra, quien se llamaba Herón de Alejandría.
Volver