GEOMETRÍA RECREATIVA
PARTE PRIMERA
GEOMETRÍA AL AIRE LIBRE

CAPITULO SEXTO
DONDE LA TIERRA SE JUNTA CON EL CIELO

Contenido:

1. Horizonte
En la estepa o en un campo llano nosotros estamos en el centro de una circunferencia, cual limita a la superficie terrestre accesible para nuestro ojo. Es el horizonte. La línea del horizonte es imperceptible: Cuando nos acercamos a ella, ella se aleja. Aunque inaccesible, ella en realidad existe; no es una ilusión o espejismo.
Para cada punto de observación hay un su limite visual de superficie, y la lejanía de este limite no es difícil de calcular. Para entender las proporciones geométricas, relacionadas con horizonte, veamos la figura 97, reflejando la parte de la esfera terrestre. En el CD es la altura sobre la superficie que se encuentra un punto C, que es el ojo de observador. ¿Qué lejanía alrededor de sí mismo se ve observador? Evidentemente, hasta los puntos M, N, donde el rayo de vista toca la superficie: después la tierra está bajo de la vista. Estos puntos M, N (y otros en la circunferencia MEN) representan el límite de la superficie terrestre visible, es decir, forman la línea del horizonte. El observador ve que aquí el cielo esta apoyándose sobre la tierra, porque al mismo tiempo se ve el cielo y algunos objetos terrestres.
Puede ser, os parece, que la figura 97 no da la imagen verdadera de la realidad: en la realidad el horizonte siempre esta en nivel de los ojos, mientras que en el dibujo el círculo esta bajo de observador.

Realmente, para nosotros siempre parece que la línea del horizonte está en el mismo nivel con los ojos, además, se sube, cuando nosotros subimos. Pero esto es ilusión: en realidad, la línea de horizonte siempre está bajo de los ojos, como se ve en la figura 97. Pero el ángulo formado por las líneas rectas CN y CM con la recta CK, perpendicularmente al radio en el punto O (este ángulo se llama “bajada del horizonte"), es demasiado pequeño, y sin aparato es imposible de ver.

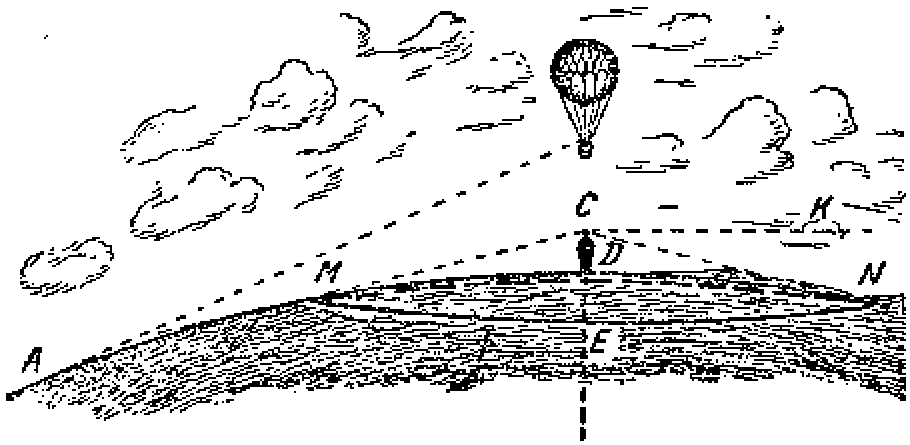

Figura 97. El horizonte

Durante de investigación anotamos otra circunstancia curiosa. Hemos dicho que cuando se sube el observador sobre la superficie terrestre, por ejemplo en un aeroplano, la línea de horizonte se fija nivel de los ojos, es decir, como se sube junto con observador. Si él se sube lo bastante, aparece que la tierra bajo aeroplano esta *situada mas bajo de la línea del horizonte,* de otro modo, la tierra se representa con forma de taza hundida, cuyos bordes es la lÍnea del horizonte. Esto esta bien explicado y descrito en las “Aventuras de Granza Pfal” por Edgar Alan Poe.

“Sobre todo, dice su protagonista aeronauta, me había sorprendido aquella circunstancia, que la superficie terrestre aparecía cóncava. Esperaba ver un hundimiento durante la subida; solamente considerando he encontrado la respuesta para este fenómeno. La línea inclinada, llevada desde el globo mío hasta la tierra, formaba el cateto del triángulo rectángulo, cuya base sería la línea desde el fondo de la inclinación hasta el horizonte, hipotenusa, la línea desde el horizonte hasta el globo. Pero la altura mía era nada comparado con el campo visual; de otra manera, la base y hipotenusa del triángulo rectangular imaginario, eran tan grandes comparados con el cateto inclinado, que parecen paralelos. Por eso, cualquier punto estando por debajo de aeronauta, siempre parece bajo del nivel horizontal. De aquí se ve la impresión de hundimiento. Y esto tiene que durar hasta que la subida no es lo bastante significativa, cuando la base de triángulo y su hipotenusa acaban por aparecer paralelas.”

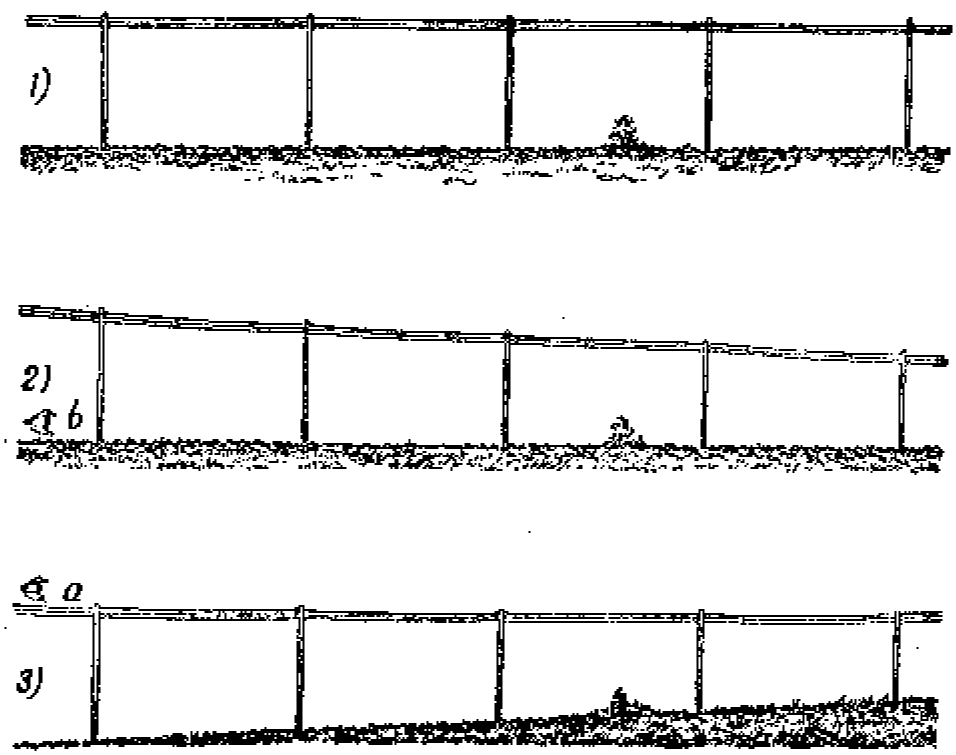

Figura 98. ¿Qué ve el ojo, observando la serie de postes telegráficos?

Añadimos otro ejemplo más. Imaginen una serie de postes telegráficos (figura 98). Para el ojo estando en el punto *b,* sobre nivel básico de los postes, la fila toma un aspecto, indicado por numero 2. Pero para el ojo estando en el punto *a,* sobre nivel de las cimas, la fila tomara el aspecto 3, es decir, la tierra parece que sube sobre horizonte.
[Volver]

2. Barco en el horizonte.
Cuando desde la costa observamos un barco, apareciendo en el horizonte, nos parece que vemos el barco no en el mismo punto (figura 99), donde él está situado, mas cerca, en el punto *B,* donde nuestra vista es tangente a la concavidad del mar. Observando a simple vista, es difícil de dejar la impresión, que el barco esta en punto *B;* y no detrás de horizonte.

Figura 99. Barco detrás de horizonte..

Sin embargo, con el catalejo, la diferencia de alejamiento del barco se ve con mas claridad. No es lo mismo ver con el catalejo los objetos cercanos y lejanos: el catalejo enfocado a la lejanía, los objetos cercanos se ven imprecisamente, y por el contrario, si de enfoca a los objetos cercanos, se ve lejanía cubierta con la niebla.

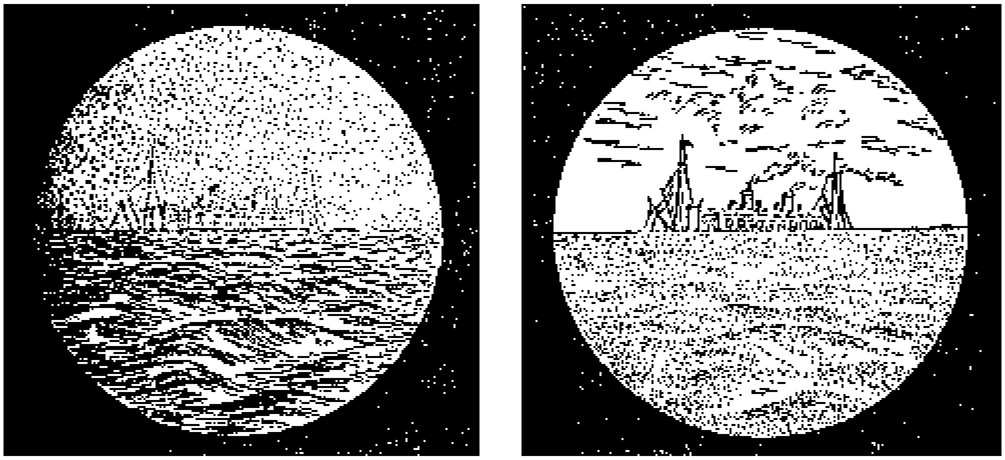

Figura 100 y 101. Barco detrás del horizonte, observado en catalejo.

Si apuntamos el catalejo (con la suficiente ampliación) sobre el horizonte y lo mantenemos así, cuando superficie acuática se ve claramente, el barco se representa impreciso, encontrando su mayor alejamiento desde el punto de observación (figura 100). Lo contrario, apuntando el catalejo así, se ve el contorno del barco, escondido detrás del horizonte, notamos, que la superficie ha perdido su claridad y se ve como cubierta con la niebla (figura 101).
Volver

3. Distancia del horizonte.
¿Qué lejos se encuentra línea del horizonte del observador? O sea, ¿Cuál es el tamaño del radio de la circunferencia, dentro de cual nos encontramos en este momento?
¿Cómo calcular distancia del horizonte, sabiendo la altura del observador por sobre la superficie?
La tarea tiene expresión en la cantidad del segmento *CN* (figura 102) por tangente, llevada desde el ojo de observador hasta superficie.
La tangente al cuadrado, lo sabemos de la geometría, es equivalente a la derivación del segmento exterior *h* secando sobre la toda longitud de este secante, es decir, sobre *h + 2R,* donde *R* es el radio de globo terrestre. Como la altura del observador por encima de superficie es normalmente, muy pequeña comparado con el diámetro *(2R)* del globo, (esta altura, por ejemplo, para un aeroplano en su máxima altura es ≈*0,001* de su parte), entonces *2R + h* usar su equivalente *2R,* y la formula se simplifica:

$$CN^2 = h \times 2R$$

Entonces, distancia del horizonte la podemos calcular por una formula muy simple.

$$\text{Dis tan cia} = \sqrt{2 \times R \times h}$$

Donde *R* es el radio del globo terrestre *(» 6400 km), h* altura de la vista encima de superficie.
Como $\sqrt{6400} = 80$, entonces la fórmula puede tener otro aspecto:

$$\text{Dis tan cia} = 80\sqrt{2 \times h} = 113\sqrt{h}$$

donde *h* está expresada en kilómetros.

Este calculo es geométrico y simplificado. Si deseamos especificar bajo los factores físicos que influyen en la distancia del horizonte, entonces, deberemos recordar a un factor, cual se llama “refracción atmosférica”. Refracción es la desviación de los rayos de luz en la atmósfera, amplía la distancia del horizonte sobre *1/15* del alejamiento calculado (sobre *6%*). El numero – *6%* - es mediato. La distancia del horizonte se amplía o disminuye según las circunstancias siguientes:

se amplía	***se disminuye***
con alta presión	con baja presión
cerca de superficie terrestre	sobre una altura
cuando hace frío	cuando hace calor
por las mañanas y tardes	en mediodía
húmedo	el tiempo seco
encima del	encima de tierra

Problema

¿Qué tan lejos puede ver una persona, estando en una llanura?

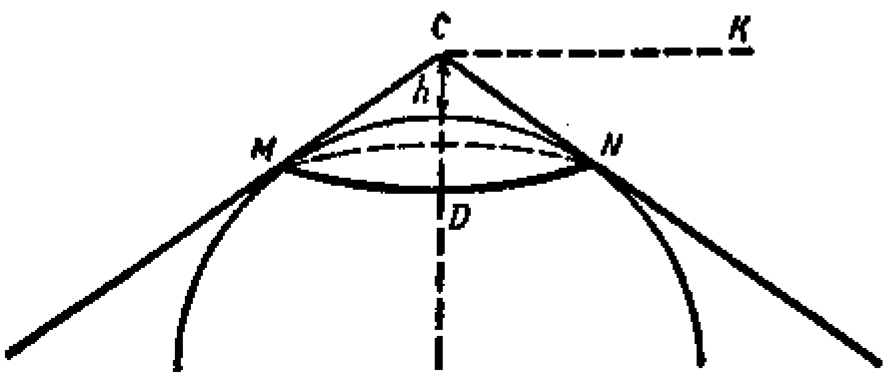

Figura 102 Para el problema sobre alejamiento de horizonte

Solución

Sabiendo, que el ojo de un adulto alcanza por encima de superficie sobre *1,6 m,* o sobre *0,0016 km,* tenemos:

$$\text{Dis tan cia} = 133\sqrt{0,0016} = 4,52\text{km}$$

Como sabemos la refracción atmosférica desfigura el camino de los rayos, por lo tanto el horizonte se aleja por el menos sobre *6%,* que es más lejos de aquella distancia que sale de la fórmula. Para tener en cuenta esta corrección, se necesita multiplicar *4,52 km* por *1,06;* y:

$$4,52 \times 1,06 \approx 4,8 \text{ km}$$

O sea, una persona de estatura media estando en una llanura no ve mas lejos de *4,8 km.* El diámetro del circulo observado es solamente *9,6 km,* superficie es *72 km*^{2}*.* Es mucho menos de lo que piensa la mayoría de la gente, los que describen lejanías de estepas y llanuras.

Problema

¿Qué tan lejos se ve el mar, estando en una lancha?

Solución

La elevación del ojo de una persona sentada en una lancha sobre agua puede ser *1 m,* ó *0,001 km,* entonces, distancia del horizonte es:

$$\text{Distancia} = 133\sqrt{0{,}001} = 3{,}58\text{km}$$

o teniendo en cuenta la refracción atmosférica, es *3,8 km.* A los objetos muy lejanos se le ven las partes de arriba; las partes fundamentales están tapadas por el horizonte.
El Horizonte se estrecha en la medida que los ojos están más bajos: para medio metro, por ejemplo, hasta *2 ½ km.* Y al contrario, observación desde los puntos elevados la distancia del horizonte aumenta: para *4 m,* por ejemplo, hasta *7 km.*

Problema
¿Qué tan lejos pudieron ver aeronautas, observando la tierra desde su nave "COAX–I", en momento de su máxima altura?

Solución
Cuando el globo está a una altura de *22 km*, entonces distancia del horizonte sobre esta elevación es

$$\text{Distancia} = 133\sqrt{22} = 530\text{km}$$

y teniendo en cuenta la refracción alrededor de *580 km.*

Problema
¿Cuántos kilómetros debería subir el piloto para ver tierra alrededor de *50 km*?

Solución
De formula sobre distancia del horizonte, en este caso tenemos ecuación

$$50 = \sqrt{2 \times R \times h}$$

de donde

$$h = \frac{50^2}{2 \times R} = \frac{2500}{12.800} = 0{,}2\text{km}$$

Entonces es suficiente subir sobre *200 m*. Para tener en cuenta la corrección, quitaremos *6%* de *50 km,* obtenemos *47 km*
Luego

$$h = \frac{47^2}{2 \times R} = \frac{2200}{12800} = 0{,}17\text{km}$$

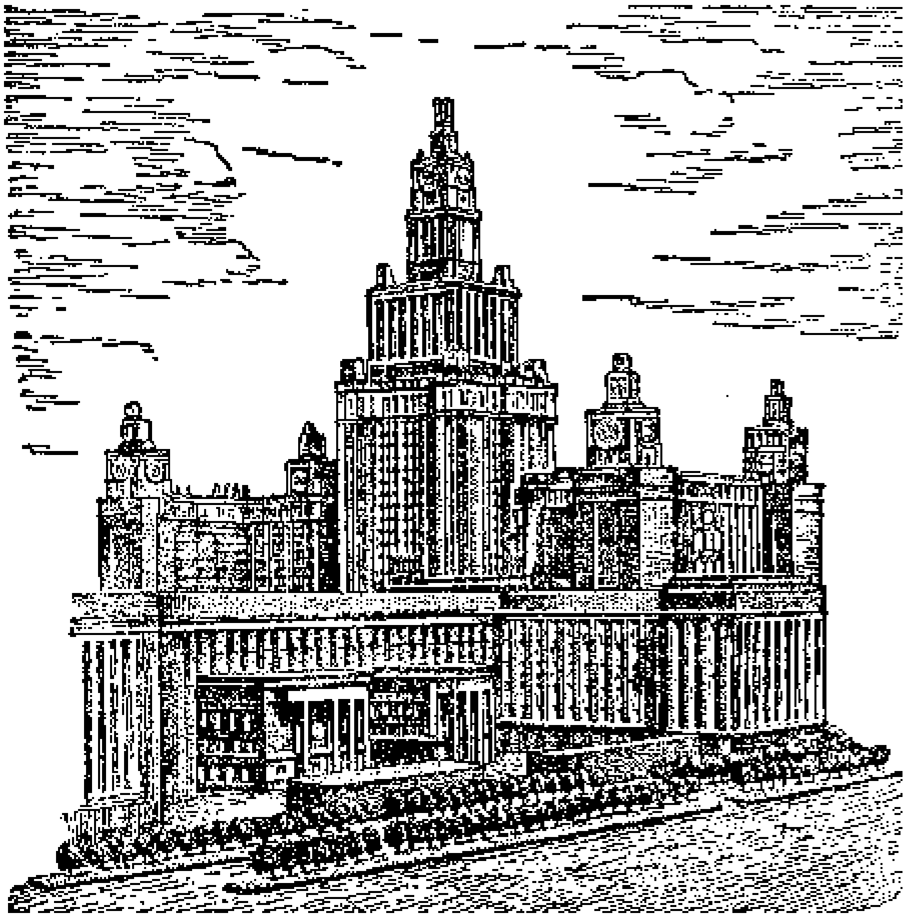

Figura 103. La universidad de Moscú (dibujo de proyecto del edificio en construcción)

En el sitio más alto de Moscú, están construyendo un edificio de veintiséis pisos (figura 103), uno de los mayores centros docentes del mundo. El se destaca por su altura, sobre *200 m* encima del nivel de río Moscú.
Por lo tanto, desde los pisos mas altos de la Universidad se abre una vista panorámica de *50 km* en radio.
Volver

4. Torre de Gogol.
Problema
Es curioso, ¿qué se amplía más rápido, la altura de subida o la distancia del horizonte? La mayoría piensa que cuando el observador se sube mas alto, más rápido aumenta el horizonte. De esta manera pensó Gogol, escribiendo el articulo, sobre arquitectura contemporánea:
"Las torres muy altas, enormes, son imprescindibles para la ciudad...Nosotros habitualmente tenemos un limite de las alturas, dejando la posibilidad de observar una sola ciudad, mientras que necesitamos observar por la menos un medio centenar de verstas[1] alrededor, y para eso es suficiente tener un o dos pisos mas arriba, y todo cambiará. El volumen del horizonte, sobre esa elevación va a crecer progresivamente''.
¿En realidad es así?

Solución

[1] 1 verst equivale 1,0668 km; 150 verstas – 160 km.

Es suficiente ver la fórmula

$$\text{Distancia del horizonte} = \sqrt{2 \times R \times h}$$

para que desde el principio veamos el error de apreciación, donde el "volumen del horizonte'' aumentará muy rápido con la subida de observador. Al contrario, distancia del horizonte aumenta mas lentamente que la altura: ella es proporcional a la raíz cuadrada de la altura. Cuando ella crece a *100* veces, el horizonte se aleja solamente a *10* veces; Cuando la altura elevada mas de *1000* veces, el horizonte se aleja solamente a *31* vez. Por eso, es equivocado pensar, que "una o dos plantas más arriba, - y todo cambiara''. Si se construye encima de un edificio de ocho pisos dos mas, la distancia se aumenta en $\sqrt{\frac{10}{8}}$, es decir, en *1,1* veces, esto es un *10%.* Es un poco perceptible.
Hablando de construcción de la torre, desde cual podemos ver, "por lo menos medio centenar de verst'', es decir, sobre *160 km;* pues es absolutamente irrealizable. El escritor, evidentemente, no sospechaba, que la torre debe de tener una altura enorme.
De la ecuación

$$\text{Distancia del horizonte} = 160 = \sqrt{2 \times R \times h}$$

obtenemos

$$h = \frac{160^2}{2 \times R} = \frac{25600}{12800} = 2 \text{ km}$$

Es la altura de una montaña muy alta. Uno de los mayores proyectos de la capital, es el edificio administrativo de *32 pisos,* donde el todo dorado va ser elevado sobre *280 m* encima de fundamento, en siete veces más bajo que los proyectos del escritor Gogol.
Volver

5. Colina de Pushkin.
El mismo error cometió el Pushkin, hablando sobre un horizonte lejano, observando desde la cima de una "colina orgullosa''.

Y el zar pudo observar de arriba
Y valle, cubierta por los toldos,
Y mar, donde corren los barcos...

Ya lo sabemos, cómo es de modesta la altura de aquella colina: las tropas de Atylla no han podido levantar una colina mas de *4 ½ m.* Ahora nosotros podemos calcular, como aumentaba el horizonte, observando desde la cima.
Elevación del ojo encima de tierra es *4,5+ 1,5* , es decir, sobre *6 m,* y por lo tanto, distancia seria equivalente a $\sqrt{2 \times 6400 \times 0{,}006} = 8{,}8 \text{ km}$. Son *4 km* mas que si se observara desde una superficie llana.
Volver

6. Dónde se juntan los rieles.
Problema

Evidentemente que varias veces habrán visto cómo se estrecha a lo lejos la vía férrea. ¿Pero han visto el punto donde se junta un riel con otro? Ahora Uds. tienen suficiente conocimientos para resolver la tarea.

Solución

Recordaremos, que cualquier objeto se convierte en un punto (para un ojo normal), cuando se ve bajo de *1¢*, es decir, cuando está apartado sobre *3400* veces su diámetro. La anchura (trocha) de una vía férrea es variable, pero la tomaremos como de *1,52 m.* entonces el espacio entre rieles debería unirse a un punto a una distancia de *1,52 ´ 3400 =5,2 km.* Pues, si tenemos la posibilidad de observar vía férrea a lo largo de *5,2 km,* tendremos la veremos como ambos se juntan en un punto.

En una superficie llana el horizonte está más cerca de *5,2 km,* está precisamente, a *4,4 km.* Por lo tanto, una persona a simple vista, estado en un sitio llano, no puede ver aquel punto de la unión. Él podría ver el punto únicamente teniendo en cuenta una de las siguientes condiciones:

1) si su agudeza de vista es baja, entonces, objetos para el se juntan sobre el ángulo de vista, mayor de *1¢*.
2) si el ojo de observador esta encima de tierra sobre mas de

$$\frac{5{,}2^2}{2 \times R} = \frac{27}{12.800} = 0{,}0021 \text{ km} = 210 \text{ cm}$$

Volver

7. Tareas sobre el faro.

Problema

En una costa está situado un faro, el vértice de cual está sobre *40 m* encima del mar. ¿Desde qué distancia se aparece el faro para un barco, si la persona que está observando está a una altura de *10 m* encima del mar?

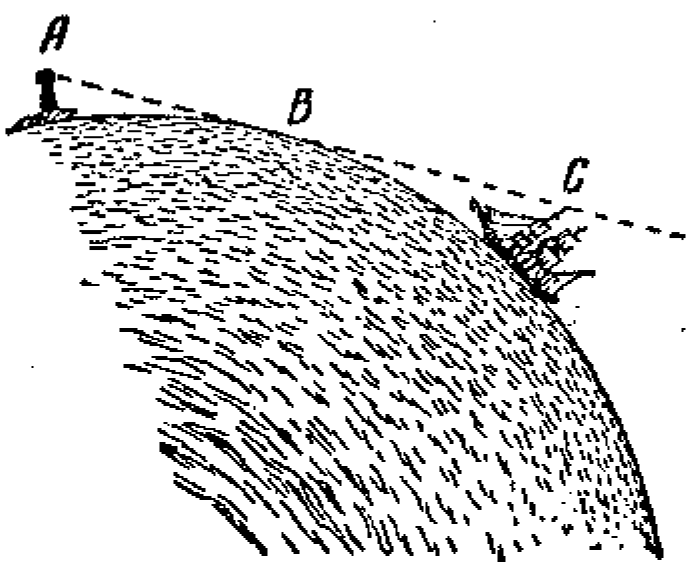

Figura 104. Para tareas sobre el faro.

Solución

En el dibujo 104 se ve, que esta tarea depende del cálculo de la línea recta *AC,* formada con dos partes *AB* y *BC.*
La parte *AB* es la distancia del horizonte desde la punta superior del faro que está a *40 m sobre la superficie; BC* es la distancia del horizonte sobre una altura de *10 m.* Por lo tanto, el trayecto buscado será:

$$113\sqrt{0,04} + 113\sqrt{0,01} = 113 \times (0,2 + 0,1) = 34 \text{ km}$$

Problema
¿De qué parte de aquel faro se ve una persona a una distancia de *30 km*?

Solución
En la figura 104 claramente se ve el camino de solución: Pero antes de todo se necesita encontrar la longitud *BC,* después quitar el resultado de la longitud total *AC,* es decir, menos *30 km,* para saber la distancia *AB.* Sabiendo *AB,* encontraremos la altura, con qué distancia del horizonte es *AB.* Hacemos todos cálculos:

$$50 = 113\sqrt{0,01} - 11,3 \text{ km}$$
$$30 - 11,3 = 18,7 \text{ km}$$
$$\text{altura} = \frac{18,7^2}{2 \times R} = \frac{350}{12800} = 0,027 \text{ km}$$

entonces, desde una distancia de *30 km* no se ven *27 m* del faro; quedan para observar solo *13 m.*
Volver

8. El rayo.
Problema
Encima de cabeza, a una altura de *1,5 km,* cayó un rayo. ¿A qué distancia podemos observar el rayo?

Solución
Deberemos calcular (figura 105) la distancia del horizonte para altura de *1,5 km*. Ella es

$$113\sqrt{1,5} = 138 \text{ km}$$

Entonces, si el terreno es llano, el rayo fue visto a ojo por una persona que está a nivel de tierra, a una distancia de *138 km* (con *6%* de corrección – sobre *146 km*).
En puntos más alejados de *146 km,* el rayo se habría visto en el horizonte; y como sobre esta distancia el sonido no llega, entonces se habría observado el rayo como un relámpago sin trueno.

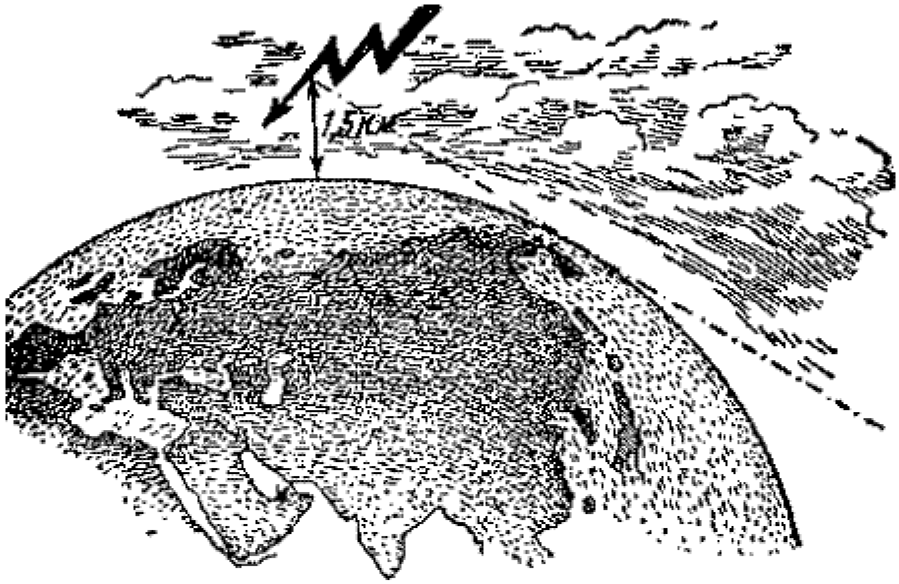

Figura 105. Para el problema del rayo.

Volver

9. El velero.

Problema

Estamos en la costa, cerca del mar, y observamos un velero alejándose. Ya le sabemos que el mástil alcanza a la altura de *6 m* sobre el mar. ¿A qué distancia de nosotros el velero empezará a desaparecerse detrás del horizonte y sobre qué distancia desaparecerá definitivamente?

Solución

El velero empezará a desaparecer (veamos la figura 99) en el punto *B*, a una distancia mayor que la distancia del horizonte para una persona de estatura mediana; es decir, en *4,4 km.* Desaparecerá definitivamente en el punto donde la distancia desde *B* es

$$113\sqrt{0,006} = 8,7 \text{ km}$$

Entonces, el velero desaparecerá sobre el trayecto desde la costa a

$$4,4 + 8,7 = 13,1 \text{ km.}$$

Volver

10. Horizonte en la Luna.

Problema

Hasta ahora todos nuestros cálculos dependieron del globo terrestre. ¿Pero cómo cambia la distancia del horizonte, si observador estuviera en otro cuerpo celeste, por ejemplo, en la Luna?

Solución

El problema se soluciona por la misma fórmula; distancia del horizonte es $\sqrt{2 \times R \times h}$, pero en este caso en vez de *2R* tenemos que poner la longitud de diámetro de la Luna. Y como el diámetro es *3.500 km,* entonces, a la elevación del ojo encima de superficie a *1,5 m* tenemos

$$\text{Distancia del horizonte} = \sqrt{3500 \times 0{,}0015} = 2{,}3 \text{ km}$$

En la Luna es posible de ver a los lejos sobre *2 ½ km.*
Volver

11. En el cráter lunar.
Observando la luna desde un cohete, podemos ver gran cantidad de montañas de forma circular, formaciones geológicas, las que no se encuentran en la Tierra. Una de las mas grandes montañas es el "cráter de Capernik'', tiene un diámetro exterior de *124 km*, e interior de *90 km.* Los puntos mas altos de la cresta llegan a tener una altura sobre superficie de la cuenca interior de *1500 m.* ¿Si Uds. están en la parte media de cuenca interior, pudieron ver desde allí la cresta del circulo?

Solución
Para contestar a esta pregunta, tenemos que calcular distancia del horizonte para cresta del cráter, es decir, para una altura de 1,5 km.
En la Luna ella es equivalente a $\sqrt{3500 \times 1{,}5} = 23 \text{ km}$. Añadiendo la distancia del horizonte para una persona de estatura mediana, obtenemos la distancia sobre la cual la cresta de cráter desaparece detrás del horizonte

23 + 2,3 = aproximadamente 25 km.

Y como el borde del cráter hasta el centro es de *45 km,* entonces, ver aquella cresta desde el centro no es posible, únicamente si se suben a las montañas centrales, las que se elevan desde el fondo de cráter a una altura de *600 m*[2].[1]
Volver

12. En Júpiter.
Problema
¿Cuál es la distancia del horizonte en Júpiter, donde el diámetro es de *11* veces mas que la terrestre?

Solución
Si Júpiter esta cubierto por costera dura y tiene superficie llana, entonces, una persona, estando en la superficie, podrá ver a los lejos

$$\sqrt{11 \times 12800 \times 0{,}0016} = 14{,}4 \text{ km}$$

Volver

13. Ejercicios Independientes
- Calcular distancia del horizonte para el periscopio de un submarino, ubicado a 30 cm sobre la superficie del mar.
- ¿A qué altura tendría que subir el piloto encima del lago de Ladoga, para ver las dos orillas en mismo tiempo, separadas por una distancia de *210 km*?
- ¿A qué altura tendría que subir el piloto entre San Petersburgo y Moscú para ver las dos ciudades en el mismo momento? El trayecto San Petersburgo – Moscú es *640 km.*

Volver

[2] Ver el libro de Y. I. Perelman, "Astronomía recreativa'', cap. II, articulo, "Pasajes de Luna''.