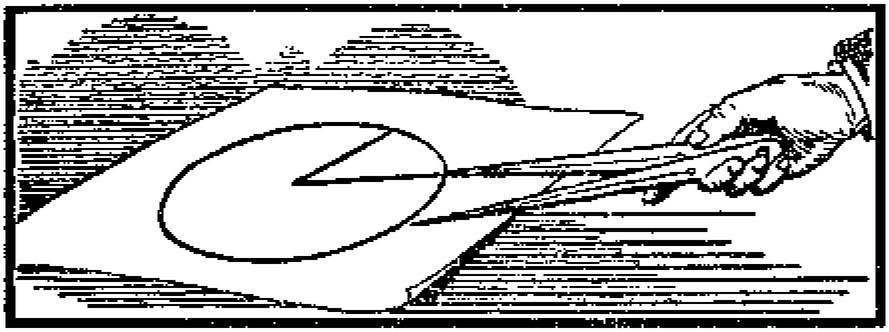
GEOMETRÍA RECREATIVA
PARTE PRIMERA
GEOMETRÍA AL AIRE LIBRE



CAPÍTULO QUINTO
SIN TABLAS NI FORMULAS

Contenido:

1. Cálculo del seno.

En este capitulo vamos a enseñar, como calcular los lados del triángulo con precisión hasta 2% y los ángulos con la precisión de hasta 1°, usando únicamente el concepto del seno y sin apelar a tablas ni fórmulas. Esta trigonometría simplificada puede ser útil durante un paseo, cuando no hay tablas y las fórmulas están olvidadas. Robinson Crusoe en su isla pudo usar esta trigonometría con éxito.

Pues, imaginaremos, que nosotros no conocemos todavía la trigonometría o está completamente olvidada, ¿No es difícil de imaginar, verdad? Empezaremos estudiar desde el principio. ¿Qué es el seno del ángulo agudo? Es la proporción del cateto alterno a la hipotenusa en aquel triángulo, el que está cortado por el perpendicular desde el ángulo hasta uno de sus lados. Por ejemplo, el seno de ángulo a (figura 87) es

$$\frac{BC}{AB}, \text{ o } \frac{ED}{AD}, \text{ o } \frac{D'E'}{AD'}, \text{ o } \frac{B'C'}{AC'}$$

Es fácil de ver, que por causa de semejanza de los triángulos, todos esas proporciones son equivalentes una a otra.

¿A qué son equivalentes los senos de diferentes ángulos de 1° a 90° ? ¿Cómo saber sin tablas? Es fácil: se necesita crear la tabla de los senos por sí mismo. Eso es lo que vamos a hacer ahora.

Empezaremos por aquellos ángulos, donde los senos ya los conocemos de la geometría. Antes de todo, el ángulo de 90°, su seno es 1. Después el de 45° , su seno es fácil de calcular por el teorema de Pitágoras; es equivalente a $\frac{\sqrt{2}}{2}$, es decir, 0,707. Luego conocemos el seno de 30°; como el cateto, alterno de este ángulo, es equivalente a la mitad de la hipotenusa, entonces, el seno de 30° = ½ .

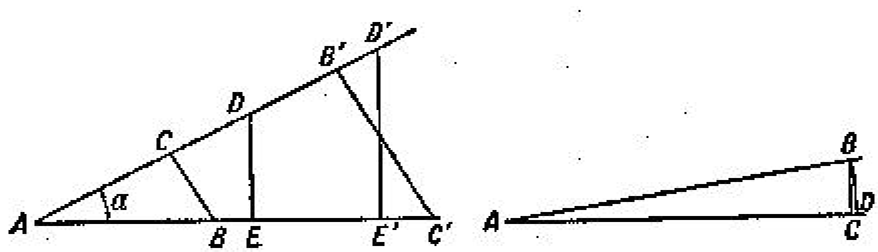


Figura 87. ¿Qué es el seno de ángulo agudo?

O sea, sabemos los senos (designación es sen) de los tres ángulos.

sen 30° = 0,5
sen 45° = 0,707
sen 90° = 1.

Eso es, evidentemente, insuficiente; deberemos saber a los senos de todos los ángulos intermedios, por lo menos de cada grado. Para la búsqueda del seno de los ángulos muy pequeños podemos utilizar a su vez la proporción del cateto e hipotenusa, coger la proporción del arco y radio: en el dibujo 87 (a la izquierda) vemos, que la proporción $\frac{BC}{AB}$. no tiene gran diferencia de $\frac{BD}{AB}$. La ultima es fácil de calcular. Por ejemplo, para ángulo de 1° , el arco

$$BD = \frac{2 \times \pi \times R}{360}$$

y, por lo tanto, sen 1° podemos tomar como equivalente a

$$\frac{2 \times \pi \times R}{360 \times R} = \frac{\pi}{180} = 0{,}0175$$

De esta manera encontraremos:

sin 2° = 0,0349
sin 3° = 0,0524
sin 4° = 0,0698
sin 5° = 0,0873

Pero tenemos que asegurarnos hasta qué punto podemos hacer esta tabla, sin cometer errores significativos. Si, por ejemplo, de esta manera, buscáramos el sen 30°, entonces obtendremos 0,524 en vez de 0,500; El error del calculo seria 24/500, es decir, 5%. Es demasiado, aunque solamente para nuestro caso. Para encontrar el límite, hasta el que podemos llevar el cálculo de los senos, probaremos encontrar el sen 15° por la manera más certera. Para esto utilizaremos la siguiente construcción no muy complicada (figura 88).

Sea, sen 15° $= \frac{BC}{AB}$. Prolongamos BC hasta D; unimos A con D, así obtenemos dos triángulos iguales: ADC y ABC, y el ángulo BAD es equivalente a 30°. Bajamos hasta AD la perpendicular BE; se ha construido un triángulo rectángulo BAE con el ángulo de 30° (<BAE), entonces $BE = \frac{AB}{2}$. Luego se calcula AE del triángulo ABE por medio del teorema de Pitágoras:

$$AE^2 = AB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}AB^2$$

$$AE = \frac{AB}{2}\sqrt{3} = 0{,}866 \times AB$$

Entonces,

$$ED = AD - AE = AB - 0{,}866 \times AB = 0{,}134 \times AB.$$

Ahora del triángulo BED calcularemos BD:

$$BD^2 = BE^2 + ED^2\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + (0{,}134 \times AB)^2 = 0{,}268 \times AB^2$$

$$BD = \sqrt{0{,}268 \times AB^2} = 0{,}518 \times AB$$

Es la mitad de BD, es decir BC, es 0,259 × AB, de aquí se deduce que el seno buscado es

$$sen15° = \frac{BC}{AB} = \frac{0{,}259 \times AB}{AB} = 0{,}259$$

Esto es el sen 15° con tres cifras significativas. Su valor es aproximado al encontrado por nosotros, es 0,262.
Comparando a los valores 0,259 y 0,262 y vemos que limitándose a dos cifras significativas, obtenemos:

0,26 y 0,26

es decir, los resultados son idénticos. El error con el cambio con el resultado más certero (0,259) al aproximarlo a 0,26 , se calcula como 1/1000, es decir, 0,4%. Esta equivocación es permisible para los calculo de marcha, y por lo tanto, los senos de ángulos de 1° hasta 15° los podremos calcular con nuestro modo encontrado.
Para el espacio de 15° a 30° nosotros podemos calcular los senos con la ayuda de las proporciones. Vamos a discurrir así: la diferencia entre el sen *30°* y sen *15°* es equivalente a *0,50 – 0,26 = 0,24.* Entonces podemos aceptar que con el crecimiento de un grado de cada ángulo, su seno crece, aproximadamente, en 1/15 de esta diferencia, es decir, en

0,24/15=*0,016.*

La realidad no es así, pero el error aparece en la tercera cifra significativa, la que nosotros hemos quitado. Añadiendo *0,016* al sen *16°,* obtenemos los senos de *16°, 17°, 18°* y etc.:

sen 16° = 0,26 + 0,016 = 0,28
sen 17° = 0,26 + 0,032 = 0,29
sen 18° = 0,26 + 0,048 = 0,31
...
sen 25° = 0,26 + 0,16 = 0,42 y etc.

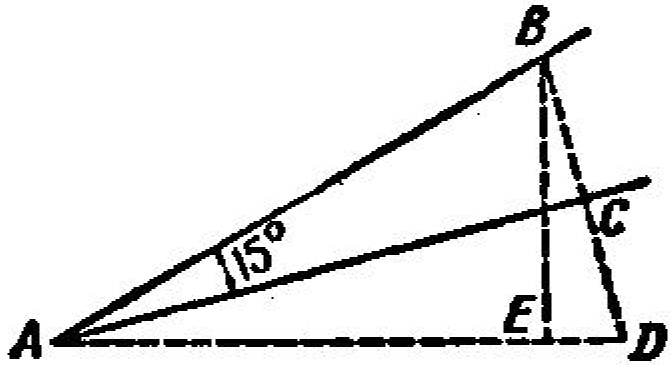


Figura 88. ¿Cómo calcular el seno de 15°?

Todos estos senos son correctos en las primeras cifras decimales, es decir, son suficiente para nuestros objetivos.
De misma manera calculan los ángulos en el intervalo de *30* a *45°*.
La diferencia

sen *45° - sen 30° = 0,707 – 0,5 = 0,207.*

Dividiendo por *15,* tenemos *0,014.* Este resultado se le añade al sen *30°*; obtenemos:

sen 31° = 0,54 – 0,014 = 0,51
sen 32° = 0,54 – 0,028 = 0,53
...
sen 40° = 0,5 + 0,14 = 0,64 y etc.

No queda solo encontrar los senos de ángulos agudos mayores de *45°*. En esto ayudara el teorema de Pitágoras. Sea, por ejemplo, queremos encontrar sen *53°*, es decir, (figura 90) la proporción $\frac{BC}{AB}$. Como el ángulo *B = 37°,* entonces su seno lo podemos calcular sobre anterior: es equivalente a *0,5 + 7 ´ 0,014 = 0,6.* Por otra parte sabemos, que

$$\mathrm{senB} = \frac{AC}{AB} \times \frac{AC}{AB} = 0{,}6$$

Donde *AC = 0,6 ´ AB.* Sabiendo *AC,* es fácil de calcular *BC.* Este segmento es

$$\sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{AB^2 - (0{,}6 \times AB)^2} - AB\sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8 \times AB$$

En principio el calculo no es tan difícil; Solamente es necesario saber calcular las raíces cuadradas.

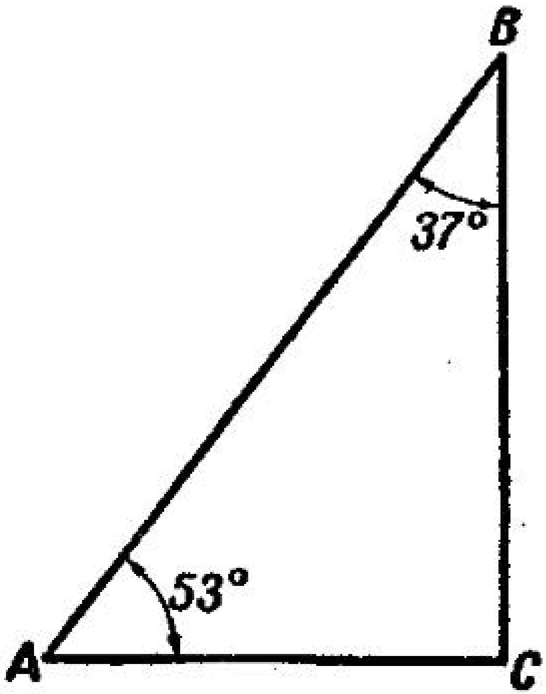


Figura 89. Para el calculo de seno del ángulo mayores de 45°.

Volver

2. Extraer raíz cuadrada.

En los manuales míos de geometría hay un modo simplificado y muy antiguo para extraer la raíz cuadrada por medio de la división. Aquí voy a explicar el otro modo antiguo, que es más fácil, como aquellos modos del curso de álgebra.

Supongamos que necesitamos encontrar $\sqrt{13}$. Ella está entre *3* y *4,* por lo tanto, es equivalente a *3* con fracción, el que indicaremos por *x.*

Entonces,

$$\sqrt{13} = 3 + x$$

elevando al cuadrado (aplicación del cuadrado del binomio) entonces

$$13 = 9 + 6x + x^2$$

El cuadrado de la porción *x* es la pequeño, y por lo tanto, para tener una primera aproximación, no tomaremos en cuenta.

Luego tenemos:

$$13 = 9 + 6x$$

de donde

$$6x = 4 \text{ y } x = 2/3 = 0,67.$$

Entonces, aproximadamente,

$$\sqrt{13} = 3,67.$$

Si queremos saber el resultado de la raíz mas exacto, escribiremos ecuación:

$$\sqrt{13} = 3\ {}^{2}/_{3} + y$$

donde habrá una fracción positiva o negativa no muy grande.
De aquí

$$13 = \frac{121}{9} + \frac{22}{3}y + y^2$$

Quitando y^2, hallaremos que y es equivalente a *–2/33 = -0,06*
Por lo tanto en la otra aproximación

$$\sqrt{13} = 3{,}67 - 0{,}06 = 3{,}61.$$

La tercera aproximación se encuentra por el mismo modo y así sucesivamente.
Por el modo habitual, que enseña nos álgebra, obtendremos $\sqrt{13}$ con una precisión de hasta *0,01,* también *3,61.*
Volver

3. Encontrar el ángulo por su seno.
Pues, tenemos posibilidad de calcular el seno de cualquier ángulo de *0°* a *90°* con dos cifras decimales. Tener las tablas preparadas no hace falta; para cálculos aproximados nosotros siempre podemos preparar las tablas, si deseamos.
Pero para solucionar las tareas trigonométricas se necesita saber o si no, calcular ángulos por el seno indicado. Eso también no es difícil. Se necesita encontrar el ángulo cuyo seno es *0,38.* Como el seno es menos de *0,5,* entonces el ángulo buscado será menos de *30°.* Pero es mas de *15°*, como sen *15°*, lo sabemos, es *0,26.* Para encontrar un ángulo entre *15°* a *30°*, seguimos las explicaciones del articulo "Cálculo del seno".

$$0{,}38 - 0{,}26 = 0{,}12$$

$$\frac{0{,}12}{0{,}016} = 7{,}5°$$

$$15° + 7{,}5° = 22{,}5°.$$

Entonces el ángulo buscado es *22,5°* .

Otro ejemplo, encontrar el ángulo cuyo seno es *0,62.*

$$0{,}62 - 0{,}50 = 0{,}12$$

$$\frac{0{,}12}{0{,}014} = 8{,}6°$$

$$30° + 8{,}6° = 38{,}6°$$

El ángulo buscado es, aproximadamente, *38,6°.*
Por fin, el tercer ejemplo: Encontrar el ángulo, cuyo seno es *0,91.*

Como el seno indicado está entre *0,71* y *1,* entonces, el ángulo está entre de *45°* y *90°*. En la figura 91, *BC* es el seno de ángulo *A,* si *BA = 1.* Sabiendo *BC*, es fácil de encontrar el seno de ángulo *B:*

$$AC^2 = 1 - BC^2 = 1 - 0{,}91^2 = 1 - 0{,}83 = 0{,}71$$
$$AC = \sqrt{0{,}71} = 0{,}42$$

Ahora encontraremos el valor de ángulo *B,* el seno de cual es *0,42;* después será fácil de encontrar el ángulo *A,* equivalente a *90° - B.* Como *0,42* esta dentro de *0,26* y *0,5,* entonces ángulo *B* esta en el espacio entre de *15°* y *30°*. Se encuentra así:

$$0{,}42 - 0{,}26 = 0{,}16$$
$$\frac{0{,}16}{0{,}016} = 10°$$
$$B = 15° + 10° = 25°$$
$$A = 90° - B = 90° - 25° = 65°$$

Ahora tenemos todo lo necesario para solucionar las tareas trigonométricas, como ya sabemos buscar los senos por ángulos y ángulos por senos con una exactitud suficientemente para nuestros objetivos.
Pero, ¿es lo suficiente saber solo un seno? ¿No deberemos tener en cuenta otras funciones trigonométricas, como coseno, tangente y etc.? Ahora vamos a dar un par de ejemplos, donde para nuestra trigonometría simplificada es necesario aprovechar solo el seno.

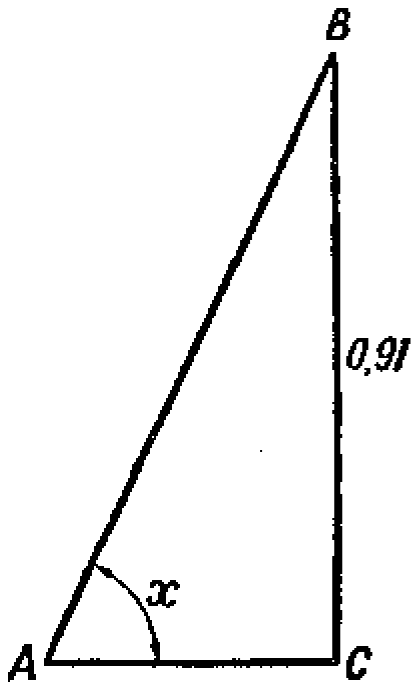


Figura 90. Cálculo del ángulo agudo por su seno.

Volver

4. Altura del Sol.

Problema

La sombra *BC* (figura 91) de la pértiga *AB* con altura de *4,2 m* tiene *6,5 m* de longitud. ¿Cuál es la altura del Sol sobre horizonte en este momento, o sea, cual es el valor del ángulo *C*?

Solución

Es fácil de comprender, que el seno de ángulo *C* es $\frac{AB}{AC}$

Pero

$$AC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{4{,}2^2 + 6{,}5^2} = 7{,}74$$

Por eso el seno buscado es equivalente a

$$\frac{4{,}2}{7{,}74} = 0{,}55$$

Por el modo dicho anteriormente buscaremos el ángulo correspondiente y resulta *33°*.
La altura del Sol es de *33°*, con una precisión de hasta ½ °.

Figura 91. Encontrar altura del Sol sobre horizonte

Volver

5. Distancia hacia la isla.

Problema

Paseando con brújula cerca de río, vemos una isleta *A* (figura 92) y deseamos encontrar su trayecto desde el punto *B* en la orilla. Para eso buscaremos el valor de ángulo *ABN,* formado por sentido norte – sur (*NS*) y por una recta *BA.* Después medimos la recta *BC* y buscaremos el valor de ángulo *NBC* entre ella y *NS*. Por fin, hacemos lo mismo en el punto *C* para la recta *AC.*

Nuestros resultados son:

El sentido	AB	inclina de NS hacia al este sobre	52°
“	BC	“	110°
“	AC	“	27°

Longitud de BC = 187 m .

¿Cómo sobre estos datos buscar el trayecto BA?

Solución

En el triángulo ABC sabemos:
el lado BC.
El ángulo ABC = 110° - 52° = 58°
ángulo ACB = 180° - 110° - 27° = 43°.
Bajaremos en este triángulo (figura 92, a la derecha) la cima BD y tenemos

$$\operatorname{sen} C = \operatorname{sen} 43° = \frac{BD}{187}$$

Calculando por el modo dicho el sen 43°, obtenemos 0,68. Entonces,

$$BD = 187 \times 0{,}68 = 127.$$

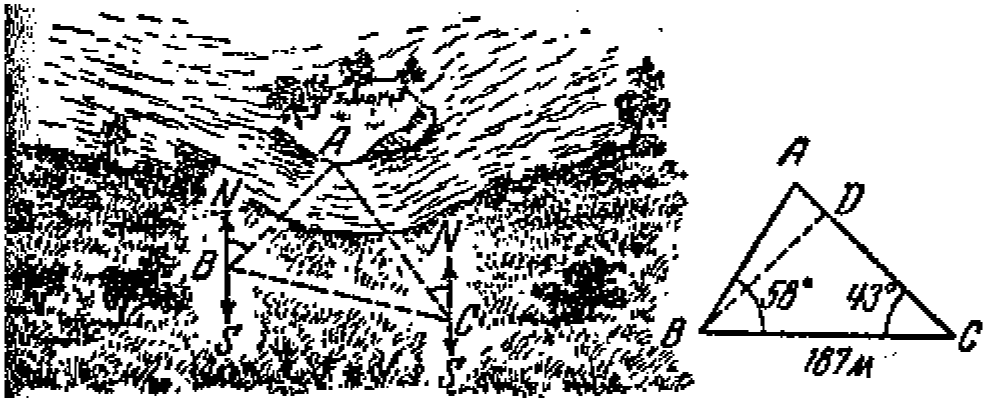


Figura 92. ¿Cómo calcular el trayecto hacia la isla?

Ahora en el triángulo *ABD* conocemos
el cateto *BD*
ángulo $A = 180° - (58° - 43°) = 79°$
ángulo $ABD = 90° - 79° = 11°$; $sen\ 11°$ lo podemos calcular: *0,19.* Por lo tanto $AD/AB = 0{,}19$. Por otra parte, por teorema de Pitágoras

$$AB^2 = BD^2 + AD^2.$$

Poniendo *0,19´AB* en lugar de *AD,* y en vez de *BD* el numero *127,* tenemos:

$$AB^2 = 127^2 + (0{,}19´AB)^2,$$

Donde *AB » 128.*
Entonces la distancia hacia la isla es *» 128 m.*
No pienso que los lectores tendrán complicaciones de buscar el lado *AC*, sí por acaso hacía falta.
Volver

6. La anchura de un lago.
Problema
Para conocer anchura del lago (dibujo 93), Uds. habían encontrado con la brújula, que la recta *AC* inclina hacia oeste sobre *21°,* y *BC* – hacia este sobre *22°.* Longitud *BC =68 m, AC = 35 m.* Hacer el calculo con estos datos.

Solución
En el triángulo *ABC* conocemos ángulo de *43°* y las longitudes de sus lados encerrados, *68 m* y *35 m.* Bajaremos (figura 93, a la derecha) el vértice *AD;* Tenemos sen $43° = AD/AC$
Calcularemos, independiente de esto, sen *43°* y recibiremos: *0,68.* Entonces $AD/AC = 0{,}68$, $AD = 0{,}68\ ´\ 35 = 24$. Luego hacemos el calculo de *CD:*

$$CD^2 = AC^2 - AD^2 = 35^2 - 24^2 = 649;\ CD = 25{,}5;$$
$$BD = BC - CD = 68 - 25{,}5 = 42{,}5.$$

Ahora del triángulo *ABD* tenemos:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = 24^2 + 42{,}5^2 = 2380;$$

AB » 49.

Entonces, anchura buscada de lago es, aproximadamente, *49 m.*
Si, por acaso, en el triángulo *ABC* necesitamos encontrar los otros dos ángulos, entonces, encontrando *AB = 49°,* seguimos adelante así:

$$\text{senB} = \frac{\text{AD}}{\text{AD}} = \frac{24}{49} = 0{,}49 \Rightarrow \text{B} = 29°$$

El tercer ángulo *C* encontrará, restando de *180°* la suma de los ángulos de *29°* y *43°;* Es *108°.*
Puede ocurrir, que en el caso examinado de la solución (por dos lados y ángulo entre ellos) ángulo actual no es agudo, seno obtuso. Si, por ejemplo, en el triángulo *ABC* (dibujo 94) son conocido el ángulo obtuso y dos lados, *AB* y *AC,* entonces, el paso de calculo sus elementos en resta, es siguiente:

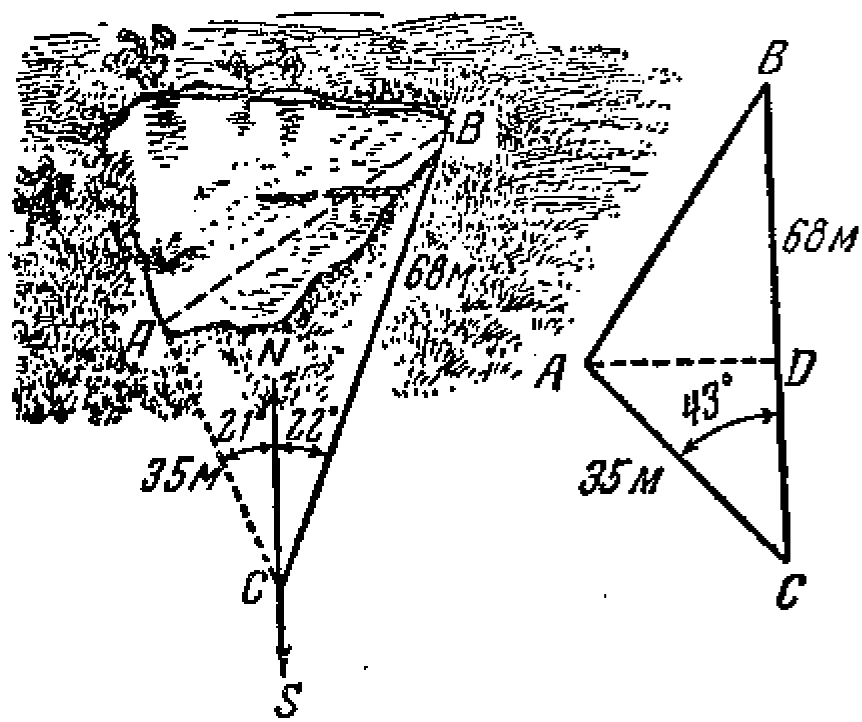


Figura 93. El calculo de anchura del lago.

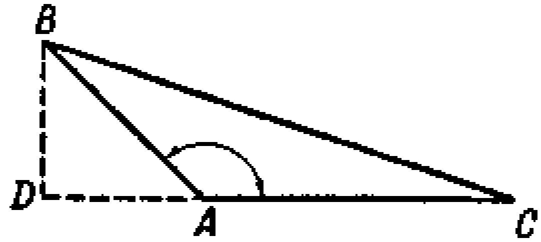


Figura 94. Para resolución del triángulo obtuso.

Bajando el vértice *BD*, buscan *BD* y *AD* del triángulo *BDA*; luego sabiendo *DA + AC,* encuentran *BC* y sen *C,* calculando la proporción *BD/BC*
Volver

7. Terreno triangular.
Problema
Durante la una excursión nosotros habíamos medido con los pasos a los lados de un terreno triangular y ya sabemos, que ellos son equivalentes a *34, 60* y *54.* ¿Cuáles son ángulos del triángulo?

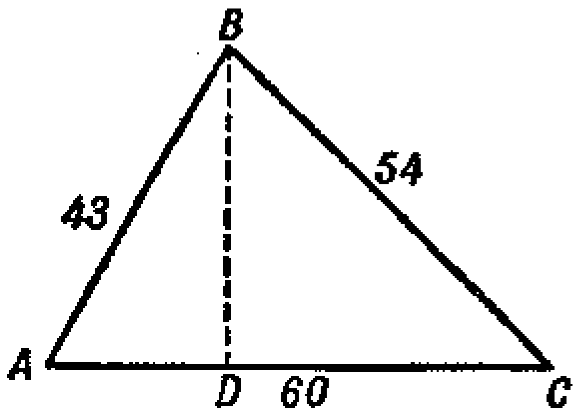


Figura 95. Encontrar los ángulos de este triángulo: 1) calculando 2) con ayuda de transportador.

Solución
Este es el caso más difícil de solución: Sobre tres lados. Sin embargo, podemos lograrlo, sin utilizar ninguna función aparte del seno.
Bajando (figura 95) el vértice *BD* sobre el lado mas largo *AC*, tenemos:

$$BD^2 = 43^2 - AD^2,\ BD^2 = 54^2 - DC^2,$$

de donde

$$43^2 - AD^2 = 54^2 - DC^2,$$

$$DC^2 - AD^2 = 54^2 - 43^2 = 1070.$$

Pero

$$DC^2 - AD^2 = (DC + AD)\ (DC - AD) = 60\ (DC - AD).$$

Se deduce,

$$60\ (DC - AD) = 1070 \text{ y } DC - AD = 17{,}8.$$

De las dos ecuaciones

$$DC - AD = 17{,}8 \text{ y } DC + AD = 60$$

Obtenemos

$$2DC = 77{,}8, \text{ es decir } DC = 38{,}9.$$

Ahora es fácil de calcular la altura:

$$BD = \sqrt{54^2 - 38{,}9^2} = 37{,}4$$

De aquí buscamos:

$$\mathrm{sen}A = \frac{BD}{BC} = \frac{37{,}4}{43} = 0{,}87 \Rightarrow A \approx 60^\circ$$
$$\mathrm{sen}C = \frac{BD}{BC} = \frac{37{,}4}{54} = 0{,}69 \Rightarrow C \approx 44^\circ$$

Tercer ángulo $B = 180 - (A + C) = 76°$

Si en este caso se hubieran calculando con ayuda de las tablas, siguiendo todas las reglas de trigonometría, entonces obtendremos los ángulos, expresados por los grados y minutos. Como los lados se midieron con pasos, entonces, los minutos serian erróneos, por que los lados medidos por los pasos, tienen equivocación no menos de *2 – 3%.* Entonces, para qué engañarse a si mismo, las cantidades “ciertas” de los ángulos obtenidos, necesitaremos redondear, por la menos, a los grados enteros. Y luego obtendremos los mismos resultados, los que encontrábamos anteriormente, aprovechando la manera más simple. El interés de nuestra trigonometría “de marcha’’ es aquí evidentemente.
Volver

8. Cálculo de ángulo sin ningún tipo de medición.
Para medir los ángulos de un terreno necesitamos por la menos la brújula, a veces es suficiente usar los dedos o una caja de cerillas. Pero puede aparecer en caso de necesidad extrema de medir ángulos, señalados en una mapa o plano.
Evidentemente, si tendremos transportador, entonces la pregunta se soluciona fácil. ¿Y si no hay? Un geómetra no tiene que perderse en este caso. ¿Cómo se soluciona esta este problema?

Problema
En la figura 96 hay una imagen de ángulo *AOB,* menor de *180°*. Encuentren su cantidad sin ningún tipo de medición.

Solución
Es posible de un punto cualquiera del lado *BO* bajar la perpendicular sobre lado *AO,* en el triángulo rectángulo obtenido, medir a los catetos y la hipotenusa, encontrar el seno del ángulo, y luego el valor del mismo ángulo (veamos “Buscar ángulo por el sino”). Pero esta solución no corresponde a nuestras duras condiciones - ¡Sin medir!
Aprovecharemos la resolución, que propuso Z. Rupeyka de ciudad Kaunas en año 1946**.**

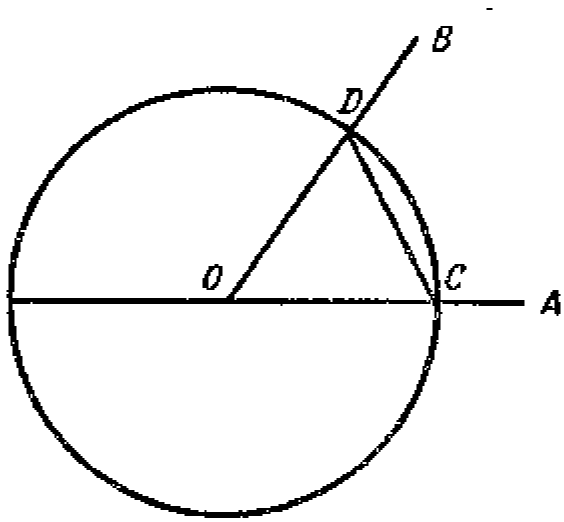


Figura 96. ¿Cómo encontrar cantidad de ángulo AOB, utilizando solo compás?

Desde el vértice *O,* como desde el centro, con abertura espontánea del compás construimos circunferencia. *C* y *D* los puntos de su intersección unimos con el segmento a los lados de ángulo.
Ahora desde el *C* punto principal sobre circunferencia vamos a gradualmente apartar con ayuda del compás la cuerda *CD,* siguiendo al mismo sentido hasta que la pata del compás no se une con el *C* punto principal de nuevo.
Dejando las cuerdas, tenemos que contar, cuantas veces durante el tiempo daremos la vuelta alrededor de circunferencia y cuantas veces era dejada la cuerda.
Pongamos, que dieron la vuelta alrededor de circunferencia *n* veces y durante este tiempo *S* veces dejando la cuerda *CD*. Entonces, el ángulo buscado será:

$$< \mathrm{AOB} = \frac{360^\circ \times \mathrm{n}}{\mathrm{S}}$$

En realidad, será mejor el ángulo tiene de *x° ;* Dejando la cuerda *CD* sobre circunferencia *S* veces, aparezca que nosotros hicimos ampliar ángulo *x°* en *S* veces, pero como la circunferencia tenia vueltas a su alrededor *n* veces, entonces el ángulo calcula de *360° ´ n,* es decir, *x° ´ S = 360°;* de aquí

$$\mathrm{x}^\circ = \frac{360^\circ \times \mathrm{n}}{\mathrm{S}}$$

Para ángulo de dibujo lineal, *n = 3, S = 20* (¡Comprueben!); Por lo tanto, *ÐAOB = 54°.* Con falta de compás la circunferencia podemos circunscribir con ayuda de un alfiler y una cinta de papel; dejar la cuerda, utilizando también cinta del papel.

Problema
Necesita encontrar con el modo señalado los ángulos de triángulo aprovechando la figura 95.
[Volver]