# GEOMETRIA RECREATIVA
## PARTE PRIMERA
## GEOMETRIA AL AIRE LIBRE

*El idioma de la naturaleza es matemática,*
*letra de esta lengua, son los círculos,*
*triángulos y otras figuras geométricas.*
*Galileo.*

## CAPITULO PRIMERO
## GEOMETRÍA EN EL BOSQUE

***Contenido:***



### 1. Por longitud de la sombra.

Todavía recuerdo esa atención, con la que yo estuve mirando por primera vez a un canoso guardabosque, el que estando junto a un pino grande, ha medido su altura con un aparato de bolsillo. Cuando él apuntó con una tablilla cuadrada en la cima del árbol, yo esperaba, que el viejo subiera con una cadena para medir, en lugar de ello, él volvió a meter en el bolsillo el aparato y dijo que la medición estaba terminada. Yo pensaba que por el momento no había comenzado...

En aquel tiempo yo era muy joven y esa manera de medir, cuando la persona establece la altura del árbol sin cortarlo o sin subirse a él, me parecía como un milagro pequeño. Tan solo mas tarde, cuando tuve las primeras naciones geométricas, he entendido, como es de fácil hacer ese tipo de milagros.

Existen muchas maneras distintas de realizar semejantes mediciones con ayuda unos aparatos sin pretensión y sin mecanismos especiales.
Un modo que es muy fácil y muy antiguo, sin duda, que con él, el sabio griego Falos, seis siglos antes de Cristo, definió en Egipto la altura de la pirámide. Él aprovechó la sombra suya. Los sacerdotes y faraón, reuniéndose al pie de la pirámide, miraban confusamente al extranjero, adivinando por la sombra la altura de la gran construcción. Falos, dice la leyenda, eligió el día cuando la longitud de su sombra era igual a su altura, en el mismo momento, la altura de la pirámide tenía que ser iguala a la longitud de su sombra. Es el único caso, cuando la persona aprovecha su sombra.
La tarea del sabio griego nos parece ahora infantil, fácil, pero no tenemos que olvidar, que estamos mirando desde la altura del edificio geométrico, levantado después de Falos. Él vivió mucho tiempo antes del Euclides, que es el autor del libro famoso, con el cual estudiaron la geometría durante dos siglos, después de su fallecimiento. En concreto, las verdades del libro que ahora las conoce cualquier alumno, no estaban descubiertas en la época de Falos. Y aprovechándose de la sombra para resolver la tarea sobre la altura de la pirámide, necesitaba saber algunas características geométricas del triángulo, prácticamente las dos siguientes (Falos fue el primero en enunciar estos principios):

1. *Los ángulos sobre la base de un triángulo isósceles, son iguales, e inversamente, los lados, opuestos a los ángulos iguales del triángulo isósceles, son iguales.*
2. *La suma de los ángulos de cualquier triángulo (el triángulo rectángulo es un caso particular), es igual a dos ángulos rectos.*

Falos, armado solo de estos conocimientos, pudo discurrir, que estando sobre un terreno plano, su sombra era igual a su altura, los rayos de Sol caen en un ángulo igual a la mitad del recto, por lo tanto, la altura de la pirámide desde el centro de su base y el extremo de su sombra definían un triángulo isósceles.
Con ayuda de ese método, que nos parece tan simple, durante un día soleado podemos hacer mediciones de cualquier árbol aislado, cuando su sombra no se une con la sombra de otro. Pero en nuestras latitudes (San Petersburgo está en la latitud 60°N y El Cairo, 30°N) no es tan fácil elegir un buen momento como en Egipto; el Sol se presenta muy bajo sobre el horizonte, y las sombras pueden ser iguales a la altura de sus objetos, solo durante el verano y en torno al mediodía. Por eso el modo del Falos no es siempre cómodo para llevar a la practica.
No es difícil calcular la altura de una manera un poco distinta, cuando en cualquier día soleado se puede usar la sombra, no importando su longitud. Se puede medir su propia sombra o la de una pértiga enterrada verticalmente en un suelo plano y calcular la altura buscada con la proporción siguiente (figura 1):

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}$$

Es decir, la altura del árbol en cuantas veces mayor que la altura de Ud. (o la altura de la pértiga), en tantas veces la sombra del árbol es más larga de la sombra Ud. (o la sombra de la pértiga). Esto se deduce de la semejanza geométrica de los triángulos *ABC* y *abc* (por dos ángulos).

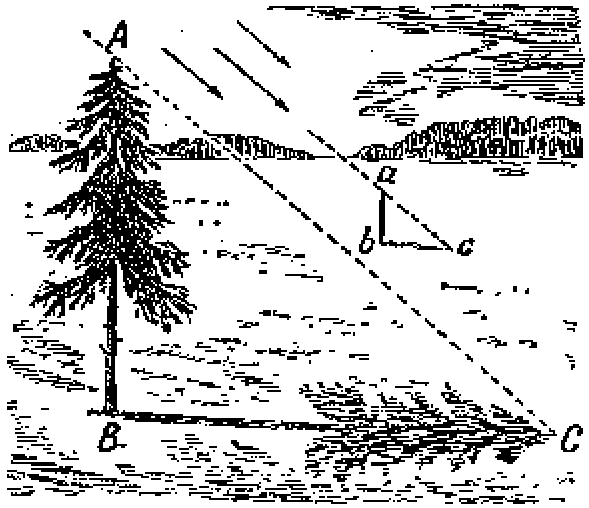

*Figura 1. Medición de la altura de un árbol por su sombra*

Algunos lectores replican, pues, que esta manera es tan elemental que no necesita argumentación geométrica. ¿Es posible que sin geometría, quede claro, en cuántas veces un árbol es más alto, en tantas veces como su sombra es mas larga? Ocurre que no es tan fácil como parece. Intente llevar a la práctica esta regla de la sombra, proyectando una con la luz de una lámpara, verá que no se cumple.
En la figura 2 se ve el poste *AB* más alto que la columna pequeña *ab*, aproximadamente al triple, y la sombra del poste más larga que la sombra de la columna (*BC : bc* ) unas ocho veces. Explicar por qué en una ocasión podemos emplear el modo, y en otro no; sin geometría no es posible.

**Problema**
Vamos a ver dónde está la diferencia. Lo que pasa es que los rayos de Sol son paralelos entre ellos, los rayos de farola no son paralelos. Esto último está claro, pero ¿cómo que los rayos de Sol son paralelos, cuando ellos, sin duda, están cruzándose en el mismo lugar de donde están saliendo?

**Solución**
Los rayos de Sol, cayendo sobre la Tierra, los podemos considerar paralelos, porque el ángulo entre ellos es muy pequeño, prácticamente imperceptible. Un simple cálculo geométrico puede aclarar la situación confusa. Imagínese dos rayos saliendo desde cualquier punto del Sol y cayendo sobre la Tierra a una distancia entre ellos de un kilómetro mas o menos. Entonces, si ponemos una pata del compás en el punto del Sol y hacemos una circunferencia de radio igual a distancia entre el Sol y Tierra (150.000.000 km), entonces nuestros dos rayos–radios sostienen un arco justo de un kilometro de longitud.
La longitud total de esta gigantesca circunferencia igual a

$$L = 2 \times \pi \times 150.000.000 = 940.000.000 \text{ km}$$

Un grado de ella, evidentemente, es 360 veces menor, es decir, mas o menos 2.600.000 km; Un minuto de arco es 60 veces menor del grado, es igual a 43.000 km, y un segundo de arco en 60 veces menor, es igual 720 km. Pero nuestro arco tiene la longitud de 1 km; es decir, corresponde al ángulo 1/720 segundos. Ese ángulo es imperceptible, incluso para aparatos astronómicos; por lo tanto, prácticamente podemos considerar que los rayos de Sol, caen a la Tierra en forma paralela.

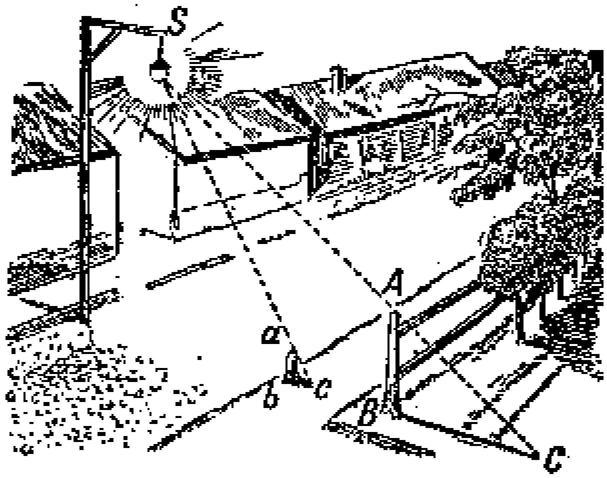


*Figura 2. Cuando el mismo modo de medición es imposible.*

Sin consideraciones geométricas no podemos argumentar el modo examinado, haciendo la proporción de la altura por su sombra.
Si llevamos a la práctica el sistema de las sombras, constataremos su inexactitud. Las sombras no son limitadas de manera precisa; ellas tienen un contorno difuso por lo que su límite es indeterminado.
Esto ocurre, porque el Sol no es un punto, es un gran cuerpo luminiscente, emite los rayos desde más de un punto.
La Figura 3 indica por qué la sombra *BC* del árbol tiene una adición de la penumbra *CD,* el que poquito a poco desaparecerá. El ángulo *CAD* entre los limites de la penumbra corresponden al ángulo, sobre el que siempre podemos ver el disco de Sol, es decir, mitad de un grado. Aparecerá un error, por que tendremos dos sombras, ambas correctas. Este error puede alcanzar un 5% o más, si la posición del sol es baja, ambas sombras sean medidas no exactamente correcto, con un bajo estado de Sol procede alanzar 5% y más.

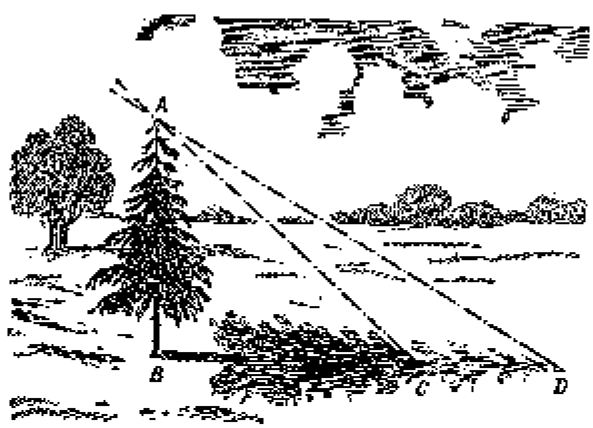


*Figura 3. Cómo aparece la sombra*

A estos errores se le unen otros, como por ejemplo, accidentes del terreno, y el resultado es poco seguro. En los sitios montañosos este modo es inaplicable.
Volver

**2. Dos modos mas**
Es muy posible hacer mediciones de la altura sin ayuda de las sombras. Existen muchas maneras; empezaremos con dos fáciles.

Antes de todo podemos utilizar las propiedades del triángulo rectángulo isósceles, aprovechando un simple aparato, lo cual es fácil de preparar a través de una tablilla y tres alfileres. Sobre una tablilla lisa marcamos tres puntos, los vértices del triángulo rectángulo isósceles, en los puntillos clavamos alfileres (Figura 4). Si no tiene escuadra y compás para dibujar el triángulo, entonces puede coger el papel, lo dobla una vez, después lo dobla transversalmente al primer doblez, de modo que ambas partes del primer doblez se unen, y se obtiene el ángulo recto. El mismo papel puede ser útil para medir los trozos iguales.

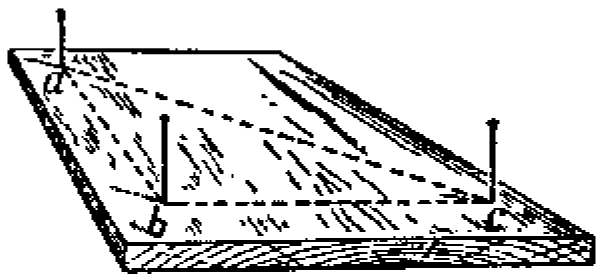


*Figura 4. El aparato de alfileres para la medición a las alturas*

Como vemos, el aparato lo podemos preparar en distintas formas.
Utilizar este aparato es tan fácil como prepararlo. Alejándose del árbol, teniendo el aparato de modo que uno de los catetos del triángulo apunte verticalmente, para facilitar la observación, podemos utilizar una plomada (un hilo con un objeto pesado atado a un extremo) atada al alfiler superior.
Acercándose al árbol o alejándose de él, Ud. siempre encontrará un sitio *A* (Figura 5), desde cual, mirando a los alfileres *a* y *c,* verán, que ellos taparán la cima *C* del árbol: eso significa que la prolongación de la hipotenusa *ac* pasa por el punto *C*. Como ya lo hemos visto en el ejemplo anterior, la separación entre *ab* es igual a *CB*, ya que el ángulo *a = 45°.*
Por consecuencia, acabando de medir el trazo *aB* y añadir *BD*, es decir, elevación *aA* del ojo sobre el fondo, recibimos la altitud buscada del árbol.

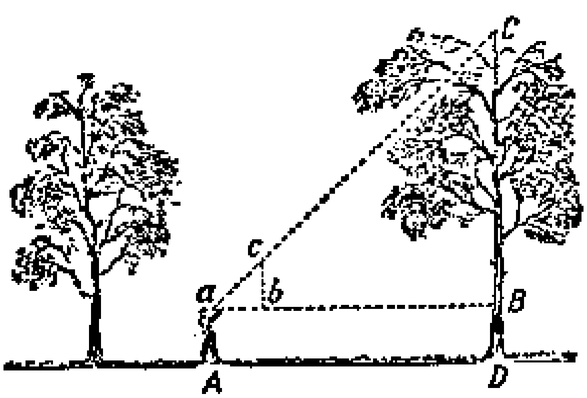


*Figura 5. Esquema del uso al aparato de alfileres*

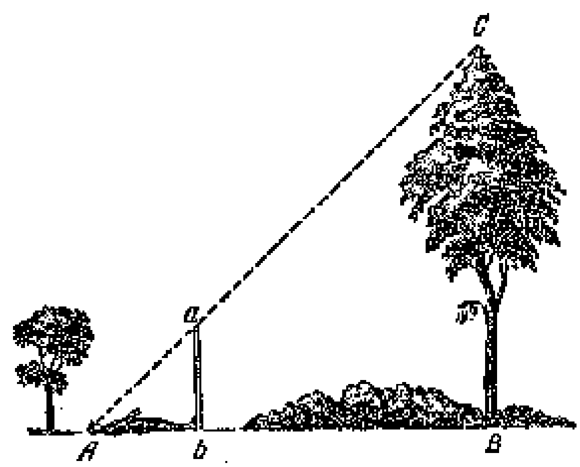


*Figura 6. Un modo mas para medir la altura.*

Existe otro modo, que no usa tablilla con los alfileres. Necesitamos una pértiga, la cual clavamos verticalmente en la tierra de modo que la parte que sobresale sea igual a su estatura. El sitio elegido para la pértiga debe ser tal que nos permita al tumbarnos como indica la Figura 6, podamos ver la cima del árbol y el punto superior de la pértiga sobre una línea recta. Como triángulo *Abc,* es isósceles y rectangular, entonces el ángulo $A = 45°$ , y por lo tanto

$$AB = BC,$$

es la altura buscada del árbol
Volver

**3. El modo de Julio Verne**

El siguiente modo tampoco es difícil. La manera de medir los objetos altos lo describió en su novela “La isla misteriosa” Julio Verne:
–Hoy vamos a medir la altura de una plazoleta de la Vista Lejana, –dijo el ingeniero.
–¿ Necesitamos algunos instrumentos? –preguntó Gebert.
–No hace falta. Lo haremos de otra manera, más fácil y más segura.
El joven, aplicadamente sigue detrás bajándose desde el muro hasta la orilla. Cogiendo una pértiga de 12 pies de longitud, el ingeniero lo hizo exacto, comprobándolo con su estatura, la cual sabia muy bien. Gebert le trajo una plomada, dada por el ingeniero; fue una piedra atada al extremo de una cuerda. Acercándose 500 pies al muro granítico y vertical, el ingeniero clavó la pértiga, verticalmente con la ayuda de la plomada, en la arena. Un poco después se alejó tanto de la pértiga, que tumbándose pudo ver el extremo de la pértiga y la cresta de montaña sobre una línea recta (Figura 7). Este punto lo marcó con un palito.
–¿Tienes algunas nociones geométricas?–preguntó a Gebert.
–Sí.
–¿Recuerdas las propiedades de los triángulos semejantes?
– Sus lados análogos son proporcionales.
–Exacto. Ahora voy a construir dos triángulos rectángulos semejantes. El cateto del pequeño sea la pértiga, el otro cateto, sea la distancia desde el palillo hasta el pie de la pértiga; la hipotenusa, es la línea de mi vista. En el triángulo mayor los catetos son la muralla, la altura que queremos medir, y la distancia desde el palillo hasta el pie de la muralla; hipotenusa es la línea de mi vista, uniéndose con la hipotenusa triángulo menor.
–¡He entendido! – exclamó el joven. El trayecto del palillo hasta la pértiga corresponde así al trayecto desde el palillo hasta el pie de la muralla, como la altura de la pértiga a la altura de la muralla.
–Exactamente. Sigamos, si medimos las dos distancias primeras, y sabiendo la altura de la pértiga, podemos calcular el cuarto miembro de la proporción que es la altura de muralla.
Ambas líneas horizontales fueron medidas: la pequeña es de 15 pies, la grande es de 500 pies.
Al fin el ingeniero lo hizo anotación:

$$\frac{15}{500} = \frac{10}{x}$$
$$15x = 5000$$
$$x = 333{,}3 \text{ pies}$$

Entonces, la altura de la muralla es 333 pies.

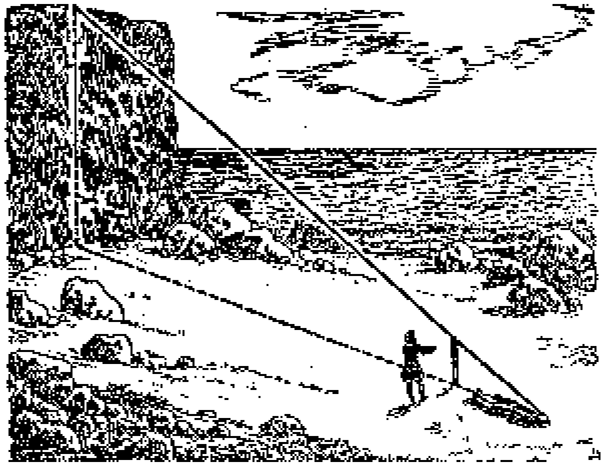

*Figura 7. Como encontraban la altura de una escala los personajes de Julio Verne*

Volver

**4. Como actuó el coronel**

Algunos modos, descritos anteriormente, no son cómodos por la necesidad de tumbarse sobre la tierra. Pero ese tipo de incomodidades las podemos evitar.

Así ha ocurrido un día en un frente durante la Segunda Guerra Mundial. A la subdivisión del teniente Ivanov le mandaron a construir un puente por encima de un río de montaña, enfrente del lugar donde desembarcó el enemigo.

Para reconocimiento de un terreno boscoso, mandaron un grupo de búsqueda con el mayor coronel Papov...En el monte cercano ellos midieron el diámetro y las alturas de los arboles más típicas de aquella zona, establecieron la cuenta de los arboles útiles.

Establecieron las alturas de los arboles con ayuda de una jalón, como indica la Figura 8. Explicación del modo.

Necesitamos una pértiga mucho alta que nuestra propia estatura, la clavamos en la tierra a cierta distancia del árbol (Figura 8). Alejándose atrás de la pértiga, a continuación *Dd* hasta el sitio *A,* desde cual, mirando a la copa del árbol, veremos el punto superior *b* de la pértiga, sobre la una línea recta. Después, sin cambiar la posición la cabeza, se mira en el sentido de una línea recta horizontal *aC,* marcando los puntos *c* y *C,* donde la línea de la vista encuentra la pértiga y el tronco. Piden al ayudante hacer las marcas en aquellos puntos, y la observación se ha terminado. Solo es necesario, en virtud de la semejanza de los triángulos *abc* y *aBC,* calcular *BC* de la proporción.

$$BC : bc = aC : aC$$

Donde

$$BC = \frac{bc \times aC}{ac}$$

Las distancias *bc, aC* y *ac* son fáciles de medir inmediatamente. Al resultado de tamaño *BC* añadir la distancia *CD,* para encontrar la altura buscada.

Para la determinación de la cantidad de los arboles, el coronel dio órdenes a los soldados de medir la superficie del bosque. Después calculó la cantidad de arboles dentro de un terreno $50 \times 50$ metros cuadrados e hizo los cálculos correspondientes.

De todos los datos recogidos, el coronel ha puesto en orden las cosas, dónde y cómo construir mejor el puente, el que fue construido rápidamente y la misión de combate fue cumplida.

Volver

## 5. Con ayuda de una agenda

En otro lugar, para tener los resultados aproximados de las alturas inaccesibles, podemos utilizar nuestra agenda y un lápiz. Ella nos ayuda a construir en el espacio dos triángulos semejantes, desde cuales obtenemos la altura buscada. Sujetamos la libreta cerca de los ojos, como indica la Figura 9. Ella tiene que estar en plano vertical y el lápiz sobresaliendo encima del canto de libreta tanto, que mirando desde el punto *a,* ver la cima *B* del árbol tapado por la punta *b* del lápiz. Como consecuencia de los triángulos semejantes *abc* y *ABC,* la altura *BC* determina de la proporción:

$$BC : bc = aC : ac$$

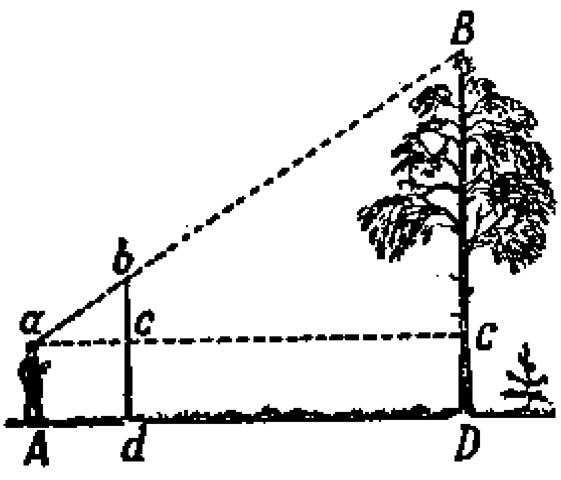


*Figura 8. Medición de altura con la ayuda de una pértiga.*

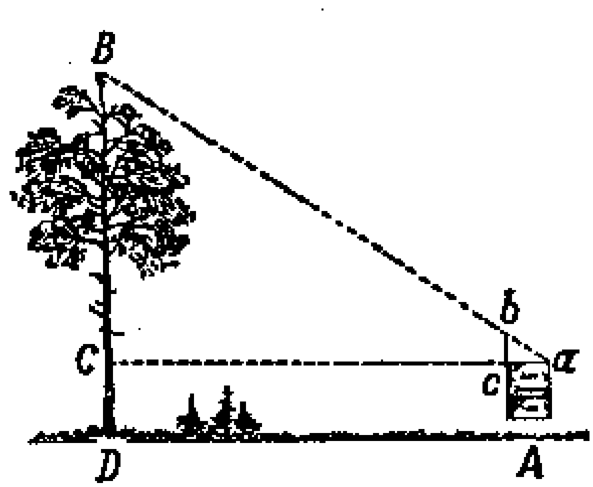


*Figura 9. Medición de altura con la ayuda de una agenda.*

Las distancias *bc, ac* y *aC* se miden inmediatamente. Al resultado de tamaño *BC* es necesario añadir la longitud *CD,* es decir, en un sitio plano, la altura de los ojos sobre el piso.

Como la anchura de la agenda es invariable, y si nosotros siempre vamos a estar a la misma distancia del árbol (por ejemplo 10 m ), la altura dependerá solo del parte sobresalida *bc* de lápiz. Por eso se puede hacer antes el cálculo, a cuál la altura corresponde una u otra altura *bc* sobresaliente, y marcar estas cifras sobre el lápiz. La agenda se convierte a un altímetro, con su ayuda se puede definir la altura inmediatamente, sin cálculos.

Volver

## 6. Sin acercarse al árbol

Algunas veces, por cualquier causalidad, no podemos acercarse justo al pie del árbol. ¿Podemos en esta ocasión determinar su altura?

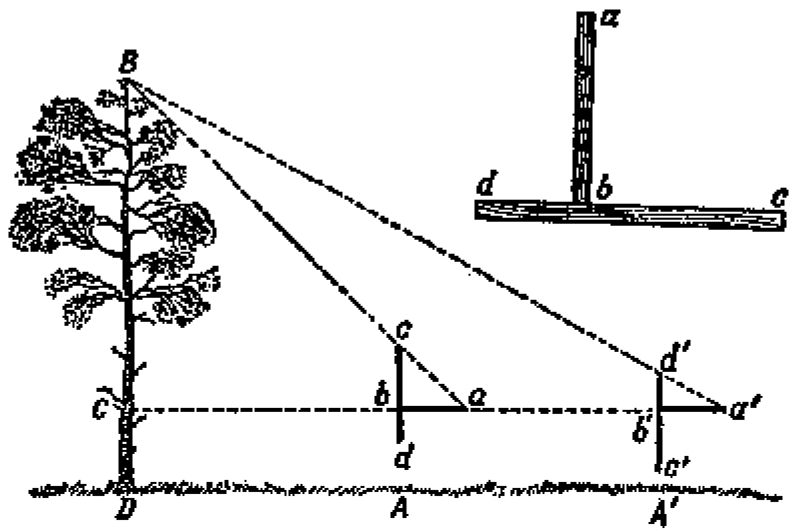


*Figura 10. Uso de un altímetro, construido solo con dos tablillas.*

Es posible. Para eso inventaron un aparato muy ingenioso, el que, como aparatos anteriores, es fácil de preparar. Dos tablillas *ab* y *cd* (Figura 10) se fijan en ángulo recto de modo que *ab* sea igual *bc,* y *bd* sea la mitad de *ab.* Es todo el truco.

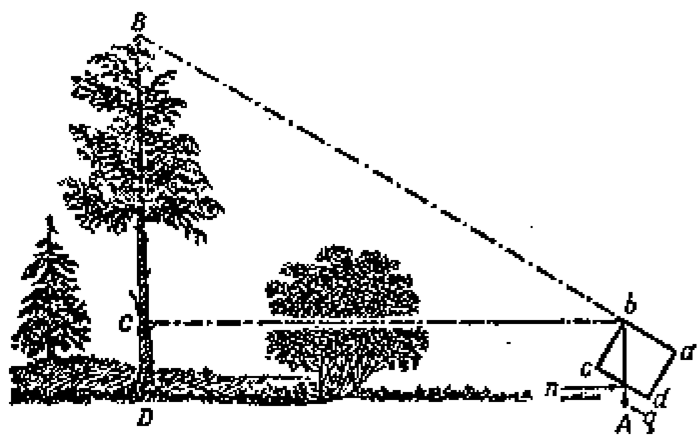


*Figura 11. Esquema del uso al altímetro de los silvicultores.*

Para poder medir, se mantiene el aparato en los manos, apuntando la tablilla *cd* verticalmente (para eso existe una plomada, el cordoncillo con el plomo), y se ubica sucesivamente en dos sitios: primero (figura 10) en el punto *A,* donde se sostiene el aparato con la punta *c* hacia arriba, y después en el punto *A'*, más alejado, donde el aparato donde el aparato se sostiene con la punta *d* hacia arriba. El punto *A* se elige así: mirando desde el punto *a* al punto *c,* en línea con la cima del árbol. El punto *A'* se busca así: mirando desde el punto *a* al punto *d,* en línea con la cima del árbol. La distancia entre los puntos *A* y *A',* es igual a la altura *BC* del árbol. La igualdad se deduce de

$$aC = BC,$$

y

$$a'C = 2BC\ ;$$

entonces,

$$a'C - aC = BC$$

Como se ve, utilizando este aparato tan simple, medimos el árbol, sin acercarnos a su base más que a la distancia igual que su altura. Se supone, que si es posible acercarse al tronco, entonces, es suficiente encontrar un punto *A* o *A'* para saber su altura.
En lugar de dos tablillas podemos utilizar dos alfileres, situándolos apropiadamente sobre una tabla. Así el “aparato” mucho más simple.
Volver

**7. El altímetro de los silvicultores.**
Casi es la hora de explicar, como son hechos los “verdaderos” altímetros, los que utilizan los silvicultores. Describo un altímetro semejante, un poco modificado, para poderlo construir por sí mismo. El sentido de estructura se ve en la figura 11.

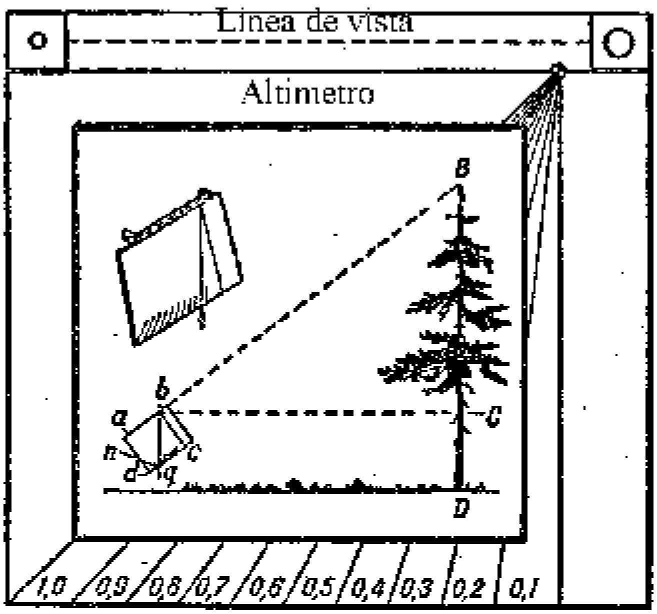


*Figura 12. El altímetro de los silvicultores*

Se hace un rectángulo *abcd,* de cartón o madera para sostener en las manos, mirando a lo largo del borde *ab,* alineándole con la cima *B* del árbol. El punto *b* tiene colgado una plomada *q*. Se marca el punto *n,* en el cual el hilo cruza la línea *dc.* Los triángulos *bBC* y *bnc* son semejantes, y como ambos son rectángulos y tienen los ángulos agudos igualdades *bBC* y *bnc* (conforme con los lados paralelos), entonces podemos escribir la proporción

$$BC : nc = bC : bc;$$

De aquí se desprende

$$BC = \frac{bC \times nc}{bc}$$

Como *bC, nc* y *bc* son conocidos, entonces es fácil de encontrar la altura buscada del árbol, añadiendo la distancia de la parte baja del tronco *CD* ( la altura del instrumento sobre la tierra).
Falta añadir algunos detalles. Si el borde *bc* de la tabla es igual, por ejemplo, a 10 cm, marcando las divisiones del centímetro, pues la proporción *nc/bc* siempre va a expresarse como fracción decimal, indicará directamente la fracción de la distancia *bC* , que es la altura *BC* del árbol.

Sea, por ejemplo, el hilo se ubicó enfrente la división séptima (es *nc* =7 cm); es decir, que la altura del árbol sobre nivel del ojo equivale a 0,7 veces la distancia del observador hasta el tronco.
Otro mejoramiento se refiere al modo de la observación: para que sea cómodo mirar a lo largo de la línea *ab,* podemos doblar sobre los ángulos superiores del rectángulo (es de cartón) dos cuadrados agujereados: Un agujero, para el ojo, el otro más grande, para apuntar la cima del árbol (figura 12).
El perfeccionamiento siguiente se representa en un aparato, el que se muestra en su tamaño natural en la figura 12. Preparar el aparato es fácil y consume poco tiempo. No necesita mucho sitio en el bolsillo y durante la excursión da la posibilidad rápida de definir las alturas de los objetos, como los arboles, edificios y etc. (El instrumento esta dentro del compuesto preparado por el autor del libro “Geometría en el aire libre”)

Problema
¿Es posible con ayuda del aquel altímetro, anteriormente descrito, medir los arboles, sin ninguna posibilidad de acercarse? ¿Si es posible, entonces cómo tenemos que actuar?

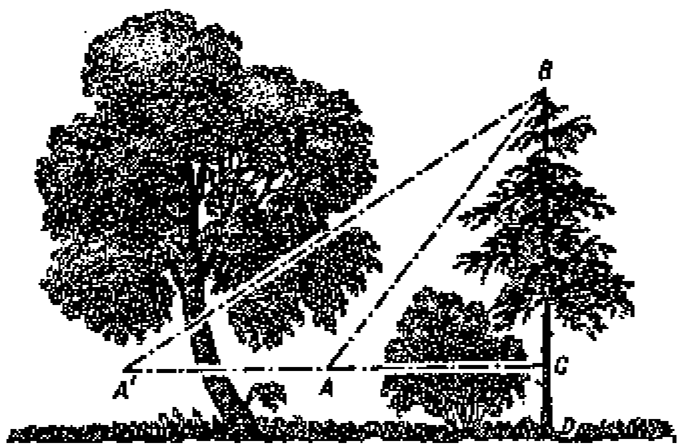

*Figura 13 Como medir la altura de un árbol, sin acercarse hacia él*

Solución
Necesita apuntar el aparato justo la cima *B* del árbol (figura 13) desde los dos puntos *A* y *A’.* Una vez que está determinado *A*,

$$BC = 0,9\ AC,$$

y en el punto *A’* que

$$BC = 0,4\ A'C.$$

Entonces, ya sabemos, que

$$AC = BC / 0,9$$

y

$$A'C = BC / 0,4$$

donde

$$AA' = A'C - AC = BC/0,4 - BC/0,9 = 25/18\ BC$$

Entonces,

$$AA' = 25/18\ BC,$$

o

$$BC = 18/25$$
$$AA' = 0,72\ AA'.$$

Se ve que midiendo la distancia *AA'* entre ambos sitios de observación y cogiendo la división necesaria de esta cantidad, se puede encontrar la altura buscada.
Volver

**8. Con ayuda del espejo**
Problema
Un modo mas para determinar la altura de un árbol con ayuda del espejo. A cualquier distancia (figura 14) desde el árbol, sobre un piso llano en el punto *C* se pone el espejo horizontalmente y alejan hacia atrás hasta un punto *D*, en el cual el observador ve la cima *A* del árbol en el espejo. Por lo tanto el árbol *AB* es tantas veces más alto que la estatura del observador *ED*, en las veces que la distancia *BC* desde el espejo hasta el árbol es más grande que la distancia *CD* desde el espejo hasta el observador. ¿Por qué?

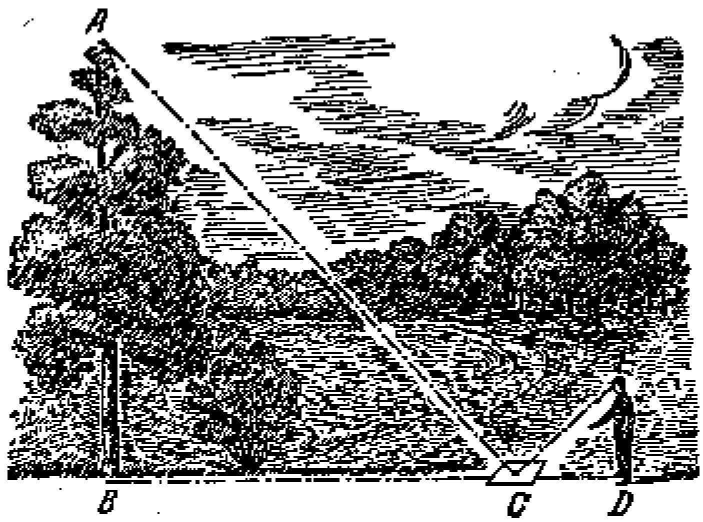

*Figura 14 Medición de altura con la ayuda de un espejo*.

Solución
El modo está fundado en la ley de la reflexión de la luz. El punto superior *A* (figura 15) se refleja en el punto *A'* así, que *AB* = *A'B.* Dada la semejanza de los triángulos *BCA'* y *CED* se deduce, que

$$A'B : ED = BC : CD$$

En esta proporción queda solo cambiar *A'B* igualado a *AB,* para argumentar la proporción de la tarea.
Esta manera cómoda podemos utilizar en cualquier tiempo, pero no en el bosque frondoso.

Problema
¿Cómo tenemos que proceder, cuando no podemos acercarnos al árbol que queremos medir?

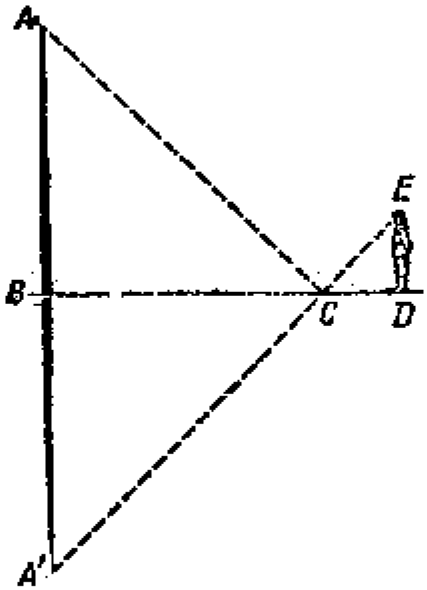


*Figura 15. Construcción geométrica para el modo de medir las alturas con ayuda del espejo*

Solución
Esta antigua tarea, tiene ya, como 500 años. Ella la examinó un matemático de la Edad Media, Antonio de Cremona en su obra "Geodesia Práctica"(año 1400).
La tarea se soluciona con la doble aplicación del modo anteriormente descrito, poniendo el espejo en dos sitios. Haciendo la construcción correspondiente, no es difícil por semejanza de los triángulos deducir que la altura buscada del árbol es igual a la elevación del ojo del observador, multiplicado por la proporción de la distancia entre las dos posiciones del espejo hasta la diferencia las distancias entre el observador y el espejo.
Antes de terminar nuestro diálogo sobre la medición de los arboles, propongo a los lectores una tarea mas "desde el bosque".

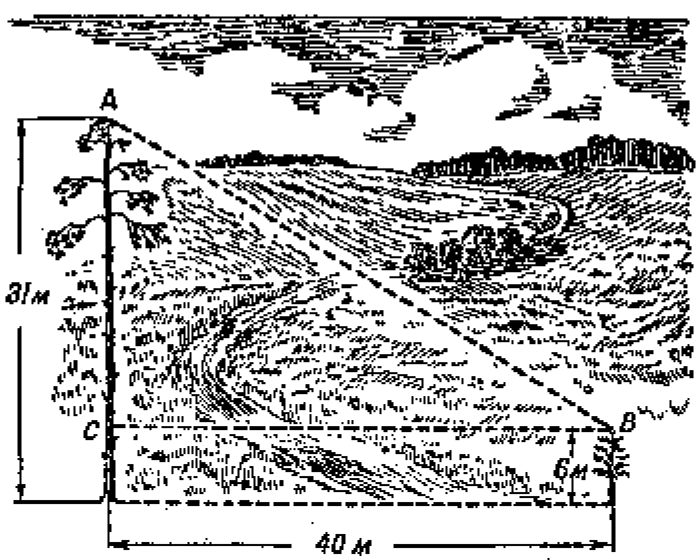


*Figura 16. La distancia entre los vértices de los pinos*

Volver

**9. Dos pinos**
Tarea
La distancia entre dos pinos es de 40 m. Sus alturas son: 31 m y solo 6 m. ¿Pueden calcular la distancia entre sus cimas?

Solución
La distancia buscada entre las cimas de los pinos (figura 16) por el teorema de Pitágoras es:

$$\sqrt{40^2 + 25^2} = 47{,}2$$

Volver

**10. La forma del tronco**
Ahora, paseando por el bosque podrían determinar la altura de cualquier árbol, por la media decena de las maneras. Sería interesante también determinar su *volumen,* calcular cuántos metros cúbicos de madera tiene, y además *pesar*, para saber si es posible llevar este tronco solo con ayuda de un carro de cuatro ruedas. Ambas tareas no son tan fáciles, como las anteriores; los especialistas no encontraron la solución *precisa* y están contentos con una evaluación aproximadamente. Incluso el tronco cortado y limpio de ramas, la tarea no se soluciona fácilmente
Lo que pasa es que un tronco del árbol, incluso liso, sin anchuras, no representa ni un cilindro, ni un cono, ni cono truncado, ni otro cuerpo geométrico, cuyo volumen lo podemos calcular a través de las fórmulas. El tronco, está claro, no es un cilindro, él se estrecha hacia la cima, pero tampoco es cono, porque su generatriz no es la línea recta, es una línea curva, además no es arco de circunferencia, como tampoco es otra línea curva, convexa hacia el eje de un árbol.
Por eso, el cálculo de volumen exacto es realizado solo con ayuda del calculo integral. Para algunos lectores le parece extraño, que para la medición de una simple viga tenemos que dirigirnos a la matemática superior. La mayoría pensa, que la matemática superior no tiene mayor relación con la vida corriente y sólo se relaciona con algunos temas especiales. Absolutamente no es así: puede ser muy correcto medir el volumen de una estrella o planeta, utilizando la geometría elemental, mientras tanto el calculo exacto del volumen a una viga o barrica no es posible sin geometría analítica o cálculo integral.
Pero nuestro libro no propone a los lectores los conocimientos de la matemática superior; por eso quedaremos satisfecho con el cálculo aproximado del volumen de un tronco. Vamos a suponer que el volumen de un tronco es aproximadamente equivalente al volumen del tronco de cono, y para el tronco completo, incluyendo su cima, el volumen del cono, o por fin, para las vigas cortas, al cilindro. El volumen de cada uno de los tres cuerpos es fácil de calcular. ¿Es posible para uniformidad de cálculo, encontrar una fórmula del volumen, que sea válida para los tres cuerpos indicados?
Después calcularemos aproximadamente el volumen del tronco, y no nos interesaremos si se parece más a un cilindro, un cono perfecto o truncado.

**La formula universal**
Evidentemente la formula existe; mas que ella es beneficiosa, no solo para el cilindro, el cono perfecto, o truncado, si no también para una prisma, las pirámides perfectas o truncadas y también para la esfera. Esta formula perfecta conocida por el nombre de la formula de Simpson:

$$v = h/6\ (b_1 + 4b_2 + b_3),$$

$h$ = la altura del cuerpo,
$b_1$ = la superficie de la cara inferior,
$b_2$ = la superficie la sección media,

$b_3$ = la superficie de la cara superior.

Problema
Demostrar, que con ayuda de la formula de Simpson se puede calcular el volumen de los siete cuerpos siguientes: del prisma, la pirámide perfecta, la pirámide truncada, el cono perfecto, el cono truncado y de la esfera.

Solución
Estando seguro de la exactitud de esta formula es fácil su la aplicación a los cuerpos enumerados. Entonces para el prisma y el cilindro (Figura 17, a)

$$v = h/6\ (b_1 + 4b_2 + b_3) = b_1 h;$$

para la pirámide y el cono (Figura 17, b)

$$v = h/6\ (b_1 + 4\ b_1/4 + 0) = b_1 h/3;$$

para el cono truncado (Figura 17, c)

$$v = \frac{h}{6}\left[pR^2 + 4p\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 + pr^2\right]$$

$$v = \frac{h}{6}\left(pR^2 + pR^2 + 2pRr + pr^2 + pr^2\right)$$

$$v = \frac{ph}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)$$

Para la pirámide truncada el cálculo es semejante.
Por fin, para la esfera (Figura 17, d)

$$v = 2R/6\ (0 + 4\ p\ R^2 + 0) = 4/3\ pR^3.$$

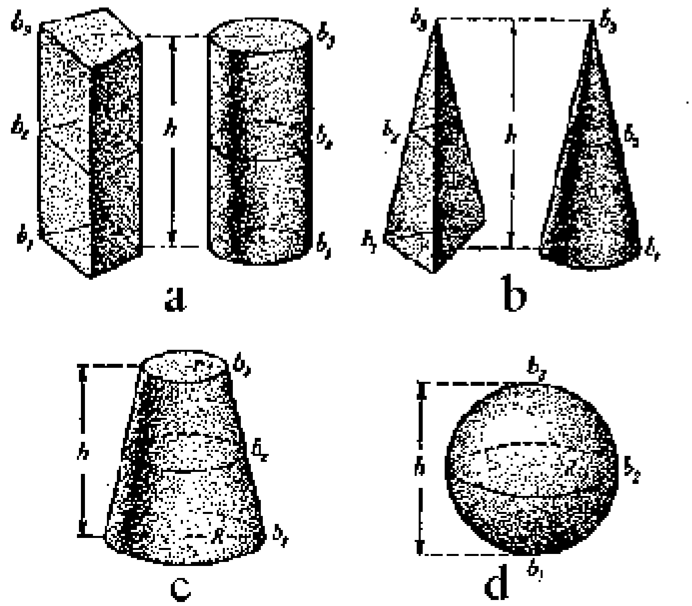


*Figura 17. Los cuerpos geométricos, cuyos volúmenes se pueden calcular con la fórmula universal*

Problema

Anotamos otra característica muy interesante de nuestra formula universal: ella es válida para calcular la superficie de las figuras *planas*: el paralelogramo, el trapecio y triángulo, si:
$h$ = la altura de la figura,
$b_1$ = la longitud del lado inferior,
$b_2$ = la longitud de la media,
$b_3$ = la longitud del lado superior

¿Cómo lo demostramos?

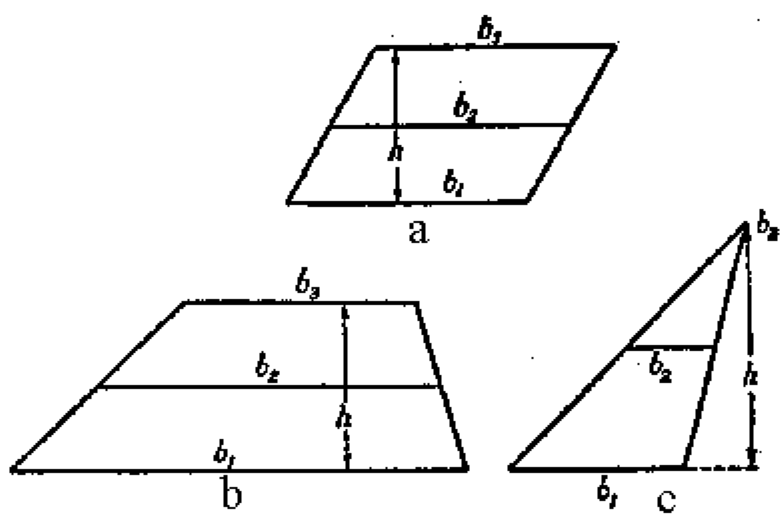


*Figura 18. La fórmula universal para calcular las superficies de estas figuras*

Solución

Utilizando la formula, tenemos:
Para el paralelogramo (cuadrado, rectángulo) (Figura 18, a)

$$S = h/6\ (b_1 + 4b_2 + b_3) = b_1 h;$$

para el trapecio (Figura 18, b)

$$S = \frac{h}{6}\left(b_1 + 4\frac{b_1 + b_3}{2} + b_3\right) = \frac{h}{2}(b_1 + b_3)$$

para triángulo (Figura 18, c)

$$S = \frac{h}{6}\left(b_1 + 4\frac{b_1}{2} + 0\right) = b_1 \frac{h}{2}$$

Como ven, la formula tiene el suficiente derecho de llamarse *universal.*

**El volumen y el peso del árbol (antes de ser talado)**

Pues tienen a su disposición la fórmula, con la ayuda de cual pueden aproximadamente calcular el volumen del tronco *cortado,* sin preocuparse y sin preguntar a qué cuerpo geométrico se parece, si al cilindro, o al cono perfecto o al cono truncado.
Para esto necesitamos las cuatro dimensiones, la longitud del tronco y los tres diámetros: el corte de abajo, de arriba y el de la longitud media. La medición de los diámetros extremos es muy fácil; la determinación inmediata del diámetro mediano sin instrumentos especiales (escala de los leñadores, Figura 19 y 20) es bastante incomoda. Pero la complejidad la podemos evitar, si medimos la circunferencia del tronco con un cordel y dividimos su longitud por $3\frac{1}{7}$, *(el valor aproximado de p)* para obtener el diámetro.

*Figura 19. Midiendo el diámetro del árbol con escalímetro*

El volumen del árbol cortado, es suficientemente exacto para los objetivos prácticos.

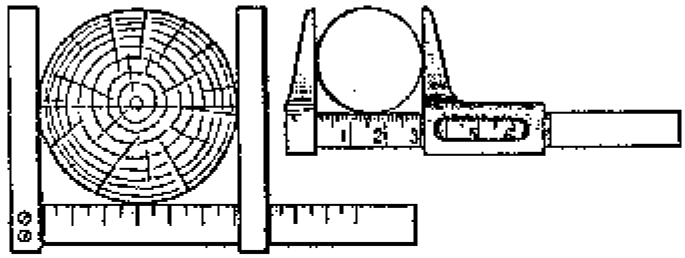

*Figura 20. Escala y escalímetro*

Brevemente, con menos exactitud se soluciona esta tarea, si calculamos el volumen del tronco, como el volumen del cilindro, el diámetro del extremo es igual al diámetro por el medio de longitud: el resultado obtenido es menor a veces hasta en un *12 %*. Pero si dividimos el tronco mentalmente en secciones de dos metros de longitud cada uno, y determinamos el volumen de cada una, como si fueran cilindros, entonces el resultado será mucho mejor, con un error de 2 a 3%.

Todo esto, sin embargo, no es aplicable al árbol crecido: si no deciden subirse a él, entonces sólo podrán medir la parte de abajo. En ese caso, nos contentaremos con un valor aproximado, sabiendo que los silvicultores profesionales actúan habitualmente de la misma manera.

Para esos casos ellos usan una tabla, llamada de "los números específicos", es decir los números muestran, cual parte del volumen de árbol medido forman el volumen del cilindro de la misma altura y el diámetro, medido sobre el nivel de pecho de una persona, es *1,30 cm* (este tamaño es más cómodo medir).

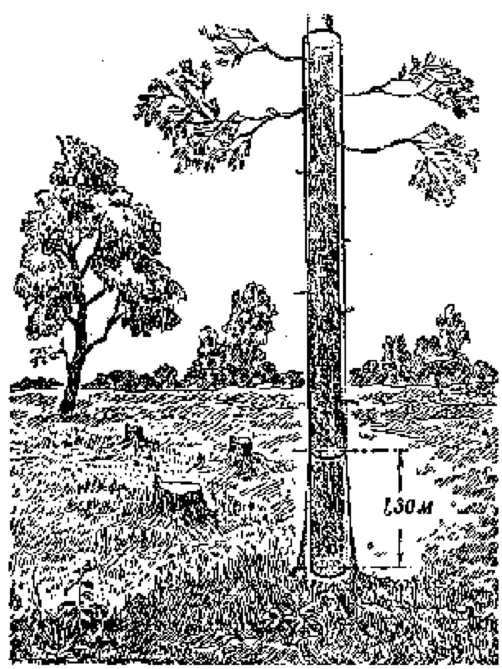

*Figura 21. Los números muestran, cual parte del volumen de árbol medido forman el volumen del cilindro de la misma altura y el diámetro, medido sobre el nivel de pecho de una persona, es 1,30 cm (este tamaño es más cómodo medir).*

El Figura 21 explica lo anteriormente dicho. Por supuesto, "los números específicos" son distintos para los arboles de altitud y de rasa diferente, así como la forma del tronco es inconstante. Pero las variaciones no son muy grandes: para el tronco de un pino o para el

abeto (crecido en bosque frondoso) "los números específicos" son entre los *0,45* y *0,51*, es decir mas o menos igual a su mitad.
Entonces, sin equivocación podemos obtener el volumen de un árbol conífero como la mitad del volumen de cilindro de la misma altura con el diámetro, sea igualado el corto de árbol sobre un nivel de pecho.
Evidentemente, es solamente un volumen aproximado, pero no muy lejos del resultado autentico: entre un *2%* de sobredimensión y hasta un *10%* de subdimensión.
Entonces solamente queda un paso para valuar el *peso* de árbol sobre la raíz. Para eso es suficiente saber, que *1 metro cubico* de una madera fresca del pino o abeto pesa como *600 – 700 kg.* Sea por ejemplo, está Ud. al lado de un abeto, la altura de cual es de *28 m.* Y la circunferencia de tronco sobre el nivel de pecho son *– 120 cm.*
La superficie de círculo correspondiente es $1.100\ cm^2$ o $0,11\ m^2$, y el volumen de tronco será

$$½ \times 0,11 \times 28 = 1,5\ m^3.$$

Sabiendo que el $1 m^3$ de madera fresca del abeto pesa *~ 650 kg* , encontraremos que el $1,5\ m^3$ deberían pesar aproximadamente una tonelada (*1 000 kg)*

**Geometría de las hojas.**

Problema

Debajo de la sombra de álamo plateado han crecido ramas desde raíz. Se coge una hoja y se comprueba que ella es más grande las hojas del árbol paterno. Las hojas que crecen en sombra compensan la falta de luz con el tamaño de su superficie. Estudiar este fenómeno es asunto de botánica, pero la geometría también aquí puede decir algo: saber en cuántas veces la superficie de la hoja es mas mayor que la superficie de la hoja del árbol paterno. ¿Cómo se solucionara este problema?

Solución

Podemos ir por dos caminos. En primer lugar, determinar la superficie de cada una hoja y encontrar sus proporciones. Medir la superficie de la hoja es posible, tapándola con un papel cuadriculado y transparente, donde cada una casilla corresponde, por ejemplo, $4\ mm^2$ (la hoja cuadriculada y transparente utilizada en la practica se llama "paleta"). Aunque la manera es correcta, pero demasiado minuciosa.
El modo corto se basa que ambas hojas, de diferentes tamaños, tienen la forma mas o menos parecida, es decir, son figuras semejantes. Las superficies de estas figuras, corresponden al cuadrado de sus medidas de longitud.
Entonces, determinando en cuántas veces una hoja es más larga o más ancha que la otra, elevamos el numero al cuadrado y obtendremos la proporción sus superficies.
Sea que una hoja de las raíces tenga la longitud *15 cm* y la hoja paterna solamente *4 cm*; la proporción de las longitudes es *15/4*, entonces, al elevar al cuadrado, tendremos *225/16,* es decir en *14* veces, que corresponde a las veces que una superficie es mayor a la otra.
Redondeando (porque la exactitud absoluta aquí no puede ser), podremos decir que la hoja del soto es más grande que la arbórea en *~15* veces.
Un ejemplo más.

Problema

Creciendo bajo la sombra, una hoja tiene una longitud de *31 cm.* En otro ejemplar, creciendo a pleno sol, la longitud de placa es solamente *3,3 cm.* ¿En cuantas veces mas o menos la superficie de primera hoja es mayor que la otra superficie?

Solución

Actuamos sobre antecedente. La proporción de las superficies es

31 / 3,3 => 960 / 10,6 = 87;

Entonces, la hoja grande tiene una superficie mayor a la otra en *90* veces.

*Figura 22. Encontrar la proporción de las superficies de estas hojas.*

No es difícil recoger en el bosque mucho pares de hojas con forma parecida, pero con tamaños distintos y de esta manera recibir un material curioso para las tareas geométricas sobre la proporción de las superficies de las figuras semejantes.

*Figura 23. Encontrar la proporción a las superficies de estas hojas.*

Para un ojo desacostumbrado siempre parece extraño, que relativamente una pequeña diferencia en longitud y anchura de las hojas derive una diferencia apreciable en sus superficies. Si, por ejemplo, entre dos hojas, de forma semejante, una mas larga que otra en *20%,* entonces la proporción de sus superficies será

*1,2 1,4,*

es decir, la diferencia importa *40%.* Con la diferencia de la anchura en *40%* una hoja supera otra sobre la superficie en

*1,4 2,*

es casi doble.

Problema
Proponemos a los lectores encontrar la proporción de las superficies de hojas, representadas en las figuras 23 y 24
Volver

**11. Un gigante a seis patas.**
¡Las hormigas son unas criaturas sorprendentes! Vivamente subiendo sobre un tallo con una carga demasiado pesada para su tamaño tan pequeño (Figura 24), ella le plantea un problema a un observador: ¿De dónde ese insecto tiene tanta fuerza, sin demasiado esfuerzo para subir con un peso 10 veces superior del peso de ella misma?
Es que una persona no es capaz de subir por la escalera, con una carga, por ejemplo, como un piano (Figura 24), pero la proporción del cargamento sobre el peso de cuerpo es igual como para una hormiga. Resulta, que una hormiga es mas fuerte que el humano.
¿Es así?
Sin geometría aquí no comprendemos.

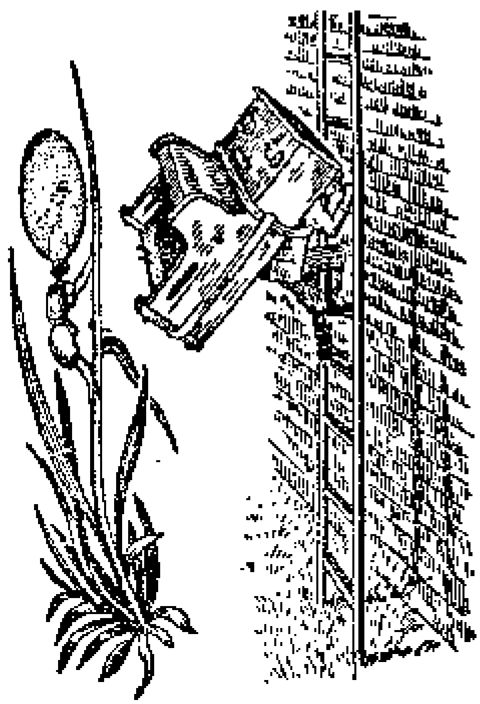

*Figura 24. Un gigante a seis patas.*

Escuchemos antes de todo a un especialista (profesor A. F. Brandt) sobre la fuerza de los músculos y después contestamos a la pregunta sobre la proporción de las fuerzas de un insecto y de una persona:

«Un músculo vivo parece a un cordoncillo elástico, pero su contracción principalmente funciona sobre la influencia de la excitación nerviosa, en la práctica fisiológica aplicando una corriente eléctrica al nervio apropiado o al mismo músculo. «Los experimentos se realizan sobre los músculos cortados de una rana recientemente muerta. Como los músculos de los animales de sangre fría mantienen sus propiedades vitales bastante tiempo fuera del organismo, a una temperatura normal. La forma de la prueba es muy simple, se corta un músculo de la pata de atrás, la pantorrilla, junto con un trozo de fémur, desde el cual comienza el tendón. Para una prueba este músculo resulta más cómodo por su tamaño y su forma y por su facilidad de desecación.

«A través del tendón se pasa un gancho, bajo de cual enganchan una pesa. Si tocamos el músculo con el hilo metálico, pasando desde la pila galvánica, entonces instantáneamente se contrae, se acorta y levanta el peso. Gradualmente poniendo mas pesas pequeñas suplementarias ya es fácil decidir cual es la máxima capacidad de levantamiento muscular.

«Atamos ahora dos, tres, cuatro músculos iguales en serie y empezaremos rápidamente a excitarles. Como vemos, con esta manera no conseguimos mayor esfuerzo de levantamiento, pero el peso va a subir mas alto. Pero si juntamos dos, tres, cuatro músculos en un *atado*, entonces, todo el sistema bajo excitación va a subir mayor cantidad del peso.

«El resultado es parecido cuando los músculos se unen entre ellos. Entonces, veremos que el esfuerzo de levantamiento muscular depende únicamente del *grosor,* es decir, del corte transversal; pero de ninguna manera depende de la longitud o del peso general.

Después de ese desvío volveremos a las semejanzas geométricas, pero en animales de diferente tamaño.

«Imaginamos dos animales; el primero ampliado al doble en todas medidas de longitud del otro; el volumen y peso del cuerpo, y también de todos los órganos sea en 8 veces mayor. Todas las medidas superficiales, además recortes transversales de los músculos, solamente en 4 veces mayor. Resulta que el esfuerzo muscular, según el crecimiento de animal de la doble longitud y aumentado en ocho veces del cuerpo, se aumenta solamente en cuatro veces, es decir, que el animal se convierte en doblemente más *débil.* Fundamentalmente un animal, cual es el triple mas largo (con los cortes transversales en 9 veces más anchos y con el peso en 27 veces más grande), resulta que es el triple más flojo, y aquel, cual al cuádruplo más largo es cuatro veces débil y etc.

Con esta ley del inadecuado crecimiento del volumen y peso de un animal, además del esfuerzo muscular se explican, porque un insecto, como una hormiga, abeja, etc. pueden subir cargas 30 ó 40 veces mayor del peso de su cuerpo, cuando una persona normal es capaz de subir solamente 9/10, y el caballo, 7/10 de su peso.»

Después de las explicaciones vamos a mirar las hazañas de hormigas "gigantes" desde otro punto de vista. Como el fabulista Y. A. Krylov burlonamente escribe:

*Una hormiga tiene una fuerza excelente,*
*De cual no lo conoce la antigüedad;*
*Y además (le dice su fuente viejo)*
*Podría levantar dos grandes granos de cebada.*

Volver