LOS NÚMEROS PRIMOS UNA APROXIMACIÓN A LA SOLUCIÓN DE LA CONJETURA DE GOLDBACH

Por: José William Porras Ferreira

Un número primo es un número natural que tiene exactamente dos divisores distintos: él mismo y el 1.

La propiedad de ser primo se denomina primalidad. A veces se habla de número primo impar para referirse a cualquier número primo mayor que 2, ya que éste es el único número primo par.

A veces se denota el conjunto de todos los números primos por $\mathbb{P}$
.
El estudio de los números primos es una parte importante de la teoría de números, la rama de las matemáticas que comprende el estudio de los números naturales. Realmente los números primos llenan el vacío dejado por la multiplicación de los números naturales entre sí, es decir si denotamos a todos los números naturales producto de la multiplicación entre sí por $\boldsymbol{M}$ (números compuestos), todos los números naturales $\boldsymbol{N}$ serian igual a $\boldsymbol{1+M+P}$

$$\boldsymbol{N=1+M+P} \qquad (1)$$

Los números primos están presentes en algunas conjeturas centenarias tales como la hipótesis de **Riemann** y la conjetura de **Goldbach**. La distribución de los números primos es un tema recurrente de investigación en la teoría de números: si se consideran números individuales, los primos parecen estar distribuidos aleatoriamente, pero la distribución «global» de los números primos sigue leyes bien definidas.

A partir de la década de 1970 varios investigadores descubrieron algoritmos para determinar si cualquier número es primo o no con complejidad subexponencial, lo que permite realizar pruebas en números de miles de dígitos, aunque son mucho más lentos que los métodos anteriores. Ejemplos de estos algoritmos son el test APRT-CL (desarrollado en 1979 por **Adleman, Pomerance** y **Rumely,** con mejoras introducidas por **Cohen** y **Lenstra** en 1984), usando los factores de $\boldsymbol{p^m}$ **-1**, donde el exponente $\boldsymbol{m}$ depende del tamaño del número cuya primalidad se desea verificar. El test de primalidad por curvas elípticas (desarrollado en 1986 por **S. Goldwasser, J. Kilian** y mejorado por **A. O. L. Atkin**), que entrega un certificado consistente en una serie de números que permite después confirmar rápidamente si el número es primo o no. El desarrollo más reciente es el test de primalidad AKS (2002) que si bien su complejidad es polinómica, para los números que puede manejar la tecnología actual es el más lento de los tres.

Durante mucho tiempo, se pensaba que la aplicación de los números primos era muy limitada fuera de la matemática pura[1]. Esto cambió en los años 1970 con el desarrollo de la criptografía de clave pública, en la que los números

[1] Carles Pina i Estany (2005). «Curiosidades sobre números primos.».

primos formaban la base de los primeros algoritmos tales como el algoritmo RSA. El algoritmo RSA se basa en la obtención de la clave pública mediante la multiplicación de dos números grandes (mayores que $\mathbf{10^{100}}$) que sean primos. La seguridad de este algoritmo radica en que no se conocen maneras rápidas de factorizar un número grande en sus factores primos utilizando computadoras tradicionales.

Desde 1951, el mayor número primo conocido siempre ha sido descubierto con la ayuda de computadores. La búsqueda de números primos cada vez mayores ha suscitado interés incluso fuera de la comunidad matemática. En los últimos años han ganado popularidad proyectos de computación distribuida tales como el GIMPS, mientras los matemáticos siguen investigando las propiedades de los números primos.

Actualmente, el mayor número primo que se conoce es $\boldsymbol{M_{43.112.609} = 2^{43.112.09} - 1}$ tiene 12.978.189 cifras en el sistema decimal. Se trata cronológicamente del 45º número primo de Mersenne conocido y su descubrimiento se anunció el 23 de agosto de 2008 gracias al proyecto de computación distribuida «Great Internet Mersenne Prime Search» (GIMPS)[2]. Desde entonces, se han descubierto otros dos números primos de Mersenne, pero son menores que el 45º[3]. Los números de Mersenne son los de forma $\boldsymbol{M_p = 2^p - 1}$, donde $\boldsymbol{p}$ es primo. Los mayores números primos conocidos son generalmente de esta forma, ya que existe un test de primalidad muy eficaz, el test de **Lucas-Lehmer**, para determinar si un número de Mersenne es primo o no.

Todos los números primos solo pueden terminar en 1, 3, 7 y 9 a partir del número 11, pero no quiere decir que todos los números naturales terminados en 1, 3, 7 y 9 son números primos. La razón es muy sencilla, si termina en número par (2, 4, 6, 8, 0) ya sería divisible mínimo por 2, y no sería un número primo por definición y si termina en 5, sería divisible mínimo por 5 y ya no sería un número primo por definición. Otro test sencillo es que la suma de sus dígitos no puede ser múltiplo de 3, porque sería divisible mínimo por 3 y tampoco sería un número primo por definición.

Buscando desarrollar una fórmula que me permitiera calcular un número primo, encontré algunas propiedades fundamentales de los números primos y hasta donde he buscado en la literatura sobre los números primos no he encontrado algo similar. Estas propiedades fundamentales son las siguientes:

"Todo numero primo (excepto el 3) elevado al cuadrado y sumándole 2 siempre da un número que es divisible por 3".

LLevado en forma de ecuación la podemos escribir como:

$$\boldsymbol{P^2 + 2 = N} \qquad (2)$$

[2] GIMPS (200). "47th Known Mersenne Prime Found"
[3] DiAmOnD (2008). «¡¡Tenemos dos nuevos primos de Mersenne!!».

Donde $\boldsymbol{P}$ es cualquier número primo (menos el 3) y cuya última cifra puede terminar en 1, 3, 7 o 9) y $\boldsymbol{N}$ es el número tal que $3|\boldsymbol{N}$ (3 divide a $\boldsymbol{N}$). Esta propiedad fundamental de los números primos me permite calcular cualquier número primo y/o verificar si un número es primo o no.

Prueba:

Si $3|\boldsymbol{N}$ entonces existe un $\boldsymbol{Q} \in \boldsymbol{Z}^{+}$ tal que $\boldsymbol{N=3Q}$ ($\boldsymbol{Z}^{+}$=números naturales positivos).

Como $\boldsymbol{P}$ es primo mayor que 3, entonces 3 no divide a $\boldsymbol{P}$, por lo tanto:

$\boldsymbol{P=3K+1}$ o $\boldsymbol{P=3K+2}$ donde $\boldsymbol{K} \in \boldsymbol{Z}^{+}$
$\boldsymbol{P^2} = (\boldsymbol{3K+1})^2 = \boldsymbol{9K^2+6K+1}$
$\boldsymbol{P^2+2} = \boldsymbol{9K^2+6K+3} = \boldsymbol{3(3K^2+2K+1)} = \boldsymbol{N=3Q}$ donde $\boldsymbol{Q=3K^2+2K+1}$
O
$\boldsymbol{P^2} = (\boldsymbol{3K+2})^2 = \boldsymbol{9K^2+12K+4}$
$\boldsymbol{P^2+2} = \boldsymbol{9K^2+12K+6} = \boldsymbol{3(3K^2+4K+2)} = \boldsymbol{N=3Q}$ donde $\boldsymbol{Q=3K^2+4K+2}$

Para calcular cualquier número primo, simplemente cogemos cualquier número que sea divisible por 3, le restamos 2 y sacamos la raíz cuadrada.

$$\boldsymbol{P} = \sqrt{\boldsymbol{N-2}} \qquad (3)$$

Si $\boldsymbol{P}$ es entero, $\boldsymbol{P}$ es primo, si el resultado no es múltiplo de 5 y/o múltiplo de un primo no divisible por 3, es decir $\boldsymbol{P}$ debe contener por lo menos a un primo.

Como ejercicio, el lector puede tomar la tabla del anexo "B", donde se muestran los números primos del 1 al 10.000 y verificar lo anterior.

"Ningún número que no sea primo elevado al cuadrado más 2 es divisible por 3 excepto los múltiplos de números primos que no sean múltiplos de 3".

Igualmente buscando desarrollar otro tipo de fórmula para encontrar números primos desarrolle la siguiente conjetura:

"Solo hay cuatro cuartetas de números primos terminadas en 1, 3, 7 y 9 en forma consecutiva. No se han encontrado otras".

Cuaterna de números primos terminados en forma consecutiva en 1,3,7,9			
11	13	17	19
101	103	107	109
2081	2083	2087	2089
82721	82723	82727	82729

Tabla No. 1 Cuartetas de números primos terminados en forma consecutiva en 1,3,7 y 9.

Es decir: no importa las n cifras que tengan los números primos, estos no pueden terminar en forma consecutiva en 1, 3, 7 y 9 (el 1, 3, 7, y 9 es la última cifra y corresponde a la decena de dichos números para $n>5$). La razón la damos al final, después de la demostración de la conjetura de Goldbach.

Se pueden hacer verificaciones sencillas con el siguiente tipo de fórmulas:

$p=10^n+(1,3,7,9)$, $p=4*10^n+(1,3,7,9)$ o $p=7*10^n+(1,3,7,9)$, para $n>2$, y $90*p+(11,13,17,19)$, siendo p primo (los únicos encontrado hasta el momento son p=23 y p=919)

El resto de posibilidades por ejemplo: $(2,3,5,6,8,9)*10^n+(1,3,7,9)$, no se deben considerar porque alguno de ellos serían divisible por 3.

Igualmente se han estudiado otras posibilidades, por ejemplo:

$31*10^n+(1,3,7,9)$ o $61*10^n+(1,3,7,9)$ y en general $k*10^n+(1,3,7,9)$, para $k>1$ tal que la suma del valor de los dígitos contenidos en k más (1,3,7,9) no sea divisible por 3 y $n\geq 1$, sin haberse encontrado otras cuartetas de primos terminados en (1,3,7,9) en forma consecutiva.

Es una conjetura bellísima, No les parece?

La belleza del número primo 23

Un amigo peruano, con el que tengo intercambio de información, el Ingeniero de sistemas Carlos Roberto Jeri Bao[4] me hablaba de la hermosura de los números primos y como por ejemplo el número primo 23 posee unas características especiales.

Veamos algunas de ellas:

1. Ya vimos la principal como por ejemplo 90*p+(11,13,17,19) produce una cuarteta de primos terminadas en 1,3,7,9 consecutivamente, pero aún más, esta conectada con la formula k*10^n+(1,3,7,9), para n=1 y k=208, si eliminamos el cero intermedio, nos queda 28=23+(2+3), todos dígitos de 23.
2. Existen 23 discos en la columna vertebral humana.
3. El homo sapiens tiene 23 pares de cromosomas.
4. Existen 23 definiciones en el Libro I de los Elementos de Euclides.
5. Es el número primo aislado más pequeño, es decir, no pertenece al conjunto de primos gemelos[5].
6. Los problemas de Hilbert son una lista de 23 problemas matemáticos propuestos por David Hilbert en el año 1900. En la actualidad aún siguen algunos sin resolverse.
7. 23 es el único número primo p tal que $p!$ tiene una longitud de p dígitos.

[4] Carlos Roberto Jeri Bao. Email: jcarlos_roberto@hotmail.com
[5] http://es.wikipedia.org/wiki/Números_primos_gemelos.

8. 23 es el único primo de la forma $p*q + p + q = p*q - p - q$, donde p y q son dos primos sucesivos (3*5 + 3 + 5 = 5*7 – 5 – 7 = 23).
9. 23 es el número primo más pequeño que es igual al producto más la suma de los primos gemelos (3*5 + (3+5) = 23).
10. El mayor entero que no puede ser expresado como la suma de dos números cuadrables[6]. Un número entero n es **libre de cuadrados** si no existe un número primo p tal que p^2 divide a n. Esto quiere decir que los factores primos de n son todos distintos. (20 es cuadrable 20=$2^2 * 5$).
11. El primo más pequeño p que divide el número de dígitos de $p!$
12. La función piso de e^pi ≈ 23.
13. 23 es el primo más pequeño para el que la suma de los cuadrados de sus dígitos es también un primo impar.
14. 11111111111111111111111 (23 unos) es un primo repunit («repunit» es un neologismo acuñado a partir de «repeated unit»).

Teorema de los números primos

El teorema de los números primos establece que:

$$p(x) / x \approx 1 / \ln x \qquad (4)$$

Para un valor grande de x.

Donde $p(x)$ es la cantidad de números primos que pueden estar por debajo de un valor x y fue establecido por primera vez por **Carl Friedrich Gauss[7].**

En los papeles de Carl Friedrich Gauss, cuando apenas tenía 14 años, se encontró lo siguiente: “números primos menores que a (= ∞) a / l a. ¿Qué significado tenía este apunte?

Primero, podríamos sustituir “a” por x, "números primos menores que a" por su equivalente, $p(x)$, " l a " por "$\ln x$" y " (= ∞) " significa " cuando a → ∞ " o "para valores grandes de a". Por tanto, el apunte encontrado de **Gauss** se traduce en la ecuación 4.

En la teoría de números es una de las consecuencias más importantes y es que el valor de $p(x)$ se aproxima a $x/\ln x$ cuando $x \to \infty$.

Tras muchos intentos fallidos de demostración, los matemáticos **Jacques Hadamard** (1865-1963) y **Charles de la Vallée-Poussin** (1866-1962) lo lograron en el año 1896. Ambas demostraciones se basaban en el resultado de que la función zeta de Riemann $\xi(z)$ no tiene ceros de la forma $1+it$ con $t>0$ consiguiendo de forma independiente, una demostración definitiva.

En realidad la demostración se hizo sobre una expresión algo más estricta de lo que se indica en la definición anterior del teorema, siendo la expresión demostrada por **Hadamard** y **Poussin** la siguiente[8]:

$$p(x) \approx Li(x) \qquad (5)$$

[6] http://es.wikipedia.org/wiki/Libre_de_cuadrados

[7] William Dunham. *"El universo de las matemáticas".* Edicciones Pirámide, S. A.

[8] Dorian Goldfeld. «The elementary proof of the prime number theorem:An historical perspective»

donde $Li(x)$ es la función logaritmo integral:

$$Li(x)=\int_2^x \frac{dy}{ln(y)} \qquad (6)$$

Desde 1896 la expresión asociada al teorema de los números primos ha sido mejorada sucesivamente En 1901, **Von Koch** mostró que si la hipótesis de **Riemann** era cierta, se tenía la siguiente estimación, más precisa[9]:

$$p(x)=Li(x)+O(\sqrt{n}lnx)$$

Siendo la mejor aproximación actual la dada por[10]:

$$p(x)=Li(x)+O[xexp(-\frac{A(ln\,x)^{3/5}}{(ln\,ln\,x)^{1/5}})] \qquad (7)$$

Donde $O[f(x)]$ se define como la función asintótica a $f(x)$ y A es una constante indeterminada.

En 1852 Schebychef[11] publicó en su obra "*Mémoire sur les nombres premiers*" la demostración que $p(x)/(x/ln\,x)$ para x grande estaba en:

$$0{,}92129 \leq \frac{p(x)}{\frac{x}{ln\,x}} \leq 1{,}10555 \qquad (8)$$

En 1892 Sylvester[12] mejoró la demostración anterior y logró demostrar que el límite establecido por Schebychef para $p(x)/(x/ln\,x)$ estaba en:

$$0{,}956 \leq \frac{p(x)}{\frac{x}{ln\,x}} \leq 1{,}045 \qquad (9)$$

Miremos el desarrollo inicial del teorema de los números primos:

Para esto es necesario contar números primos y construir una tabla para $p(x)$.

La tabla No.3 nos da una lista de los valores de x, $p(x)$, $p(x)/x$ y $x/p(x)$, para potencias de 10 desde 10 a 10.000 millones.

Las cuatro columnas de la tabla No. 1 son las siguientes:

x= el número donde queremos verificar cuantos números primos hay menores que él.

$p(x)$= El número de primos contenidos en x y menores que él.

$p(x)/x$= La proporción de los números menores a x que son primos.

$x/p(x)$= El inverso de la proporción anterior y que la llamaremos $q(x)$.

$q(x)$ es muy importante para la demostración del teorema de los números primos, (ecuación 4), porque su comportamiento es muy similar al comportamiento de una expresión matemática conocida, como veremos más tarde.

---

[9] Von Koch, Helge (1901). "Sur la distribution des nombres premiers". SpringerLink

[10] Wikipedia la encyclopedia libre. "Teorema de los números primos".

[11] José Manuel Sánchez Muñoz "Historia de Matemáticas Riemann y los números primos" Revista de investigación pensamiento matemático. 1 de octubre de 2011 p 15-16

[12] J.J. Sylvester, On Tchebycheff 's theorem of the totality of prime numbers comprised within given limits, Amer. J. Math. 4 (1881), 230–247.

x	*p(x)*	*p(x)/x*	*x/p{x)=q(x)*
10	4	0,4	2,5
100	25	0,25	4,0
1.000	168	0,168	5,952
10.000	1.229	0,123	8,137
100.000	9.592	0,09592	10,425
1.000.000	78.498	0,078498	12,739
10.000.000	664.579	0,0664579	15,047
100.000.000	5.761.455	0,05761455	17,357
1.000.000.000	50.847.534	0,050847534	19,667
10.000.000.000	455.052.512	0,0455052512	21,977

Tabla No. 2. Valores de ***x, p(x), p(x)/x*** y ***x/p(x)*** entre 10 y 10.000 millones.

Ejemplos:

El número de primos menores o iguales a x=10 son p(10)=4 (2,3,5 y 7), que representan el 40% de los números del 1 al 10, el otro 60% serían el resto de números (1,4,6,8,9 y 10) (ecuación 1). Para x=10.000 millones, p(10.000.000.000)=455.052.512, que representa el 4,55% de los números del 1 al 10.000 millones y el 95,45% el resto de números.

Qué nos está indicando lo anterior? Que a medida que aumenta ***x***, la proporción de números primos va disminuyendo, es decir ***M*** aumenta (menos vacíos dejados por la multiplicación de los números entre si y llenados por ***P*** de la ecuación 1).

Pareciera que no se pudiesen sacar más conclusiones del comportamiento de los números primos de esta tabla, pero recuerde la cuarta columna, que nos indica un patrón de comportamiento también.

Para localizar el patrón, consideremos el número ***e*** y su logaritmo natural (***ln***), que permitirá analizar dicho patrón.

Para ello construímos una tabla con ***x, q(x)*** y $e^{q(x)}$ tal como se muestra en la tabla No.3 y analicémosla:

La columna de la derecha ($e^{q(x)}$) al comienzo no muestra una regularidad perfecta, pero conforme nos desplazamos hacia abajo, cada número de la derecha es aproximadamente unas diez veces mayor que el valor de arriba, siguiendo un comportamiento similar al de ***x***, que aumenta también 10 veces.

Este comportamiento se puede relacionar mediante la siguiente ecuación:

$e^{q\,(10\cdot x)} \approx 10\, e^{q\,(x)}$ (10)

Para un x grande.

x	$x/p\{x)=q(x)$	$e^{q(x)}$
10	2,5	12,18
100	4,0	54,60
1.000	5,95	384,67
10.000	8,14	3417,61
100.000	10,43	33703,42
1.000.000	12,74	340843,28
10.000.000	15,05	3426740,43
100.000.000	17,36	34508862,38
1.000.000.000	19,67	347625784,54
10.000.000.000	21,98	3502664764,61

Tabla No.3 Comportamiento similar entre x y $e^{q(x)}$

Esta ecuación nos indica que al aumentar el valor de x a $10\cdot x$, el nuevo producto, $e^{q\,(10\cdot x)}$ será unas diez veces mayor que el anterior producto, $e^{q\,(x)}$.

Esta propiedad permite utilizar otra propiedad de los logaritmos naturales y es que:

$\ln\,(e^x) = x$ es decir: $e^{\ln x} = x$ (11)

El siguiente paso sería comparar las ecuaciones 8 y 9:

$$e^{q(10\cdot x)} \approx 10\, e^{q(x)} \quad \text{y} \quad e^{\ln\,(10\cdot x)} = 10\, e^{\ln x}$$

Se puede observar que su comportamiento es idéntico, por lo que haciendo una hipótesis: $q(x)$ es aproximadamente igual a $\ln(x)$ cuando x es grande, nos conduciría al teorema de los números primos expresado por **Gauss**.

Reemplazando $q(x)$ por $x/p(x)$ para obtener:

$x/p(x) \approx \ln x$

Y después sacando los inversos tendríamos:

$p(x)/x \approx 1/\ln x$

La siguiente tabla nos muestra numéricamente esta similitud y como se va aproximando a medida que va creciendo x.

x	*p{x)/x=1/q(x)*	*1/lnx*
10	0,4	0,43429448
100	0,25	0,21714724
1.000	0,168	0,14476483
10.000	0,1229	0,10857362
100.000	0,09592	0,0868589
1.000.000	0,078498	0,07278241
10.000.000	0,0664579	0,06204207
100.000.000	0,05761455	0,05428681
1.000.000.000	0,050847534	0,048225494
10.000.000.000	0,045505251	0,04342945

Tabla No. 4 Similitud del comportamiento de $p(x)/x$ con relación a $1/lnx$ cuando $x\to\infty$

25 años después de que **Gauss** descubriera la aproximación **Legendre** la mejoró aún más:

$$p(x)\approx \frac{x}{lnx-1{,}08366} \qquad (12)$$

La siguiente tabla nos muestra esta mejora:

x	*p{x)/x=1/q(x)*	*1/lnx*	*1/(lnx-1,08366)*
10	0,4	0,43429448	0,820394958
100	0,25	0,21714724	0,283969078
1.000	0,168	0,14476483	0,171700488
10.000	0,1229	0,10857362	0,123051474
100.000	0,09592	0,0868589	0,09588403
1.000.000	0,078498	0,07278241	0,078543178
10.000.000	0,0664579	0,06204207	0,06651397
100.000.000	0,05761455	0,05428681	0,057680037
1.000.000.000	0,050847534	0,048225494	0,050917519
10.000.000.000	0,045505251	0,04342945	0,0455743

Tabla No.5 Mejora introducida por Legendre al teorema de los números primos.

La conjetura de Goldbach.

En teoría de números, la **conjetura de Goldbach** es uno de los problemas abiertos más antiguos en matemáticas. A veces se le califica del problema más difícil en la historia de esta ciencia[13].

La conjetura es la siguiente:

[13] Weisstein, Eric W. «Goldbach's conjecture». *MathWorld*. Wolfram Research

"*Todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos*." **Christian Goldbach** (1742).

Christian Goldbach (18 de marzo de 1690 - 20 de noviembre de 1764), fue un matemático prusiano, nacido en Königsberg, Prusia (hoy Kaliningrado, Rusia), hijo de un pastor. Estudió leyes y matemáticas. Realizó varios viajes a través de Europa y conoció a varios matemáticos famosos, como **Leibniz**, **Leonhard Euler**, y **Daniel Bernoulli**.

Llevado en forma de expresión matemática, la conjetura de **Goldbach** la podemos expresar así:

$$x = p_1 + p_2 \qquad (13)$$

donde x es el número par y p_1 y p_2 son los números primos y que pueden ser iguales.

Asumamos que p_1 es el mayor número primo posible por debajo de x. Si el siguiente número primo p_2 por encima de x es mayor que $2p_1$-*1*, tendríamos números pares entre $2p_1$ y p_2 que no cumplirían la conjetura de **Goldbach** y por lo tanto seria falsa. Si lo anterior nunca se cumple la conjetura sería verdadera, es decir:

$2p_1 - 1 > p_2$, la conjetura es verdadera

$2p_1 - 1 < p_2$, la conjetura es falsa. El número par $2p_1+2$ no podría ser la suma de dos números primos. (Si $p_2=2p_1+1$, el par más cercano a p_2 como suma de dos primos sería $2p_1+1+3$, por lo tanto el par $2p_1+2$ quedaría excluido).

En otras palabras si $p_2 = p_1 + \Delta$ donde Δ es la separación entre p_2 y p_1 tendríamos:

$p_1 - 1 > \Delta$, la conjetura es verdadera

$p_1 - 1 < \Delta$, la conjetura es falsa.

Es decir la máxima separación entre p_2 y p_1 debe ser $p_1 - 1$ ($\Delta_m = p_1 - 1$). Por lo tanto para probar esta conjetura, sería suficiente demostrar cómo se afecta la separación promedio de los números primos si $p_2 = p_1 + \Delta_m$, para lo cual utilizaremos el teorema de los números primos.

Miremos la siguiente tabla construida con la fórmula de los números primos, donde con respecto a las tablas anteriores hemos calculado cuatro columnas que requieren explicación.

x	$p(x)$	% números primos contenidos en x	K	Δ_p Separación promedio	incremento separacion promedio
1,00E+01	4	40,00%	0,40	2,500	2,500
1,00E+02	25	25,00%	0,63	4,000	1,500
1,00E+03	168	16,80%	0,67	5,952	1,952
1,00E+04	1.229	12,29%	0,73	8,137	2,184
1,00E+05	9.592	9,59%	0,78	10,425	2,289
1,00E+06	78.498	7,85%	0,82	12,739	2,314

1,00E+07	664.579	6,65%	0,85	15,047	2,308
1,00E+08	5.761.455	5,76%	0,87	17,357	2,310
1,00E+09	50.847.534	5,08%	0,88	19,667	2,310
1,00E+10	455.025.509	4,55%	0,89	21,977	2,310
1,00E+11	4.124.599.869	4,12%	0,91	24,240	2,263
1,00E+12	37.668.527.415	3,77%	0,91	26,550	2,310
1,00E+13	346.621.096.885	3,47%	0,92	28,850	2,300
1,00E+14	3.210.012.022.164	3,21%	0,93	31,150	2,300
1,00E+15	29.890.794.226.982	2,99%	0,93	33,460	2,310
1,00E+16	279.660.033.612.131	2,80%	0,94	35,760	2,300
1,00E+17	2,63E+15	2,63%	0,94	38,060	2,300
1,00E+18	2,48E+16	2,48%	0,94	40,360	2,300
1,00E+19	2,34E+17	2,34%	0,95	42,670	2,310
1,00E+20	2,22E+18	2,22%	0,95	44,970	2,300
1,00E+21	2,12E+19	2,12%	0,95	47,270	2,300
1,00E+22	2,02E+20	2,02%	0,95	49,570	2,300
1,00E+23	1,93E+21	1,93%	0,96	51,880	2,310
1,00E+24	1,85E+22	1,85%	0,96	54,180	2,300
1,00E+25	1,77E+23	1,77%	0,96	56,480	2,300
1,00E+26	1,70E+24	1,70%	0,96	58,780	2,300
1,00E+27	1,64E+25	1,64%	0,96	61,090	2,310
1,00E+28	1,58E+26	1,58%	0,96	63,390	2,300
1,00E+29	1,52E+27	1,52%	0,96	65,690	2,300
1,00E+30	1,47E+28	1,47%	0,97	67,990	2,300

Tabla No. 6 Cálculos con la fórmula del teorema de los números primos

La parte resaltada en amarillo, corresponde a valores reales de ***p(x).*** A partir de 1E+11 (10^{11}), corresponde a valores calculados con la fórmula del teorema de los números primos.

La tercera columna es el porcentaje de números primos contenidos en ***x*** (***p(x)/x***). Lo cual nos indica que a medida que va creciendo ***x*** el porcentaje de números primos va disminuyendo.

La cuarta columna la llamamos ***K*** y es la relación entre el porcentaje de números primos contenidos en ***10x*** y el porcentaje de números primos contenidos en ***x*** a medida que ***x*** va creciendo. Nos indica que esta relación tiende a 1 para ***x*** muy grande.

La quinta columna nos da el promedio de separación de los números primos contenidos en ***x***.

La sexta columna nos da el incremento de la separación promedio de los números primos a medida que se incrementa x. Este incremento se vuelve constante y corresponde a $ln10$.

Los valores resaltados en azul, nos indica que pasamos de valores con $p(x)$ real hasta 1E+10 al valor de $p(x)$ calculado con 1E+11. Existiendo una distorsión inicial que se estabiliza después.

Si observamos en la tabla 6, columnas 5 y 6 podemos deducir la siguiente ecuación a partir de la fila 1,00E+06:

$$\Delta p_p = 12{,}739 + n\ln 10 \qquad (15)$$

Donde Δp_p es el valor promedio de separación de los números primos a partir de 1E 06, n es el número de veces que incremento a x exponencialmente (n=E-6), a partir de 1E 06, (E es el exponente). La siguiente tabla muestra esta fantástica relación. (la parte resaltada en amarillo corresponden a valores reales de los números primos).

x	$p(x)$	Δ_p Separación promedio	$\Delta p_p=12{,}739+n\ln 10$
1,00E+01	4	2,500	
1,00E+02	25	4,000	
1,00E+03	168	5,952	
1,00E+04	1.229	8,137	
1,00E+05	9.592	10,425	
1,00E+06	78.498	12,739	12,739
1,00E+07	664.579	15,047	15,04
1,00E+08	5.761.455	17,357	17,34
1,00E+09	50.847.534	19,667	19,65
1,00E+10	455.025.509	21,977	21,95
1,00E+11	4.124.599.869	24,240	24,25
1,00E+12	37.668.527.415	26,550	26,55
1,00E+13	346.621.096.885	28,850	28,86
1,00E+14	3.210.012.022.164	31,150	31,16
1,00E+15	29.890.794.226.982	33,460	33,46
1,00E+16	279.660.033.612.131	35,760	35,77
1,00E+17	2,63E+15	38,060	38,07
1,00E+18	2,48E+16	40,360	40,37
1,00E+19	2,34E+17	42,670	42,67
1,00E+20	2,22E+18	44,970	44,98
1,00E+21	2,12E+19	47,270	47,28
1,00E+22	2,02E+20	49,570	49,58

1,00E+23	1,93E+21	51,880	51,88
1,00E+24	1,85E+22	54,180	54,19
1,00E+25	1,77E+23	56,480	56,49
1,00E+26	1,70E+24	58,780	58,79
1,00E+27	1,64E+25	61,090	61,09
1,00E+28	1,58E+26	63,390	63,40
1,00E+29	1,52E+27	65,690	65,70
1,00E+30	1,47E+28	67,990	68,00

Tabla No. 7 Comparación separación promedio de los números primos con la ecuación 13.

Podemos concluir que: $\Delta_p \approx \Delta_{p_p}$ para x muy grande (mayor de 1 E 06)

Ahora comparemos este crecimiento uniforme de la separación promedio con relación a si $p_2=p_1+\Delta_m$ llegase a tomar este valor**,** para lo cual hemos construido la siguiente tabla:

x	$p(x)$	Δ_p Separación promedio	Último primo antes de x	Separación promedio con p2=p1+Δ_m
1,00E+01	4	2,50	7	2,60
1,00E+02	25	4,00	97	7,42
1,00E+03	168	5,95	997	11,79
1,00E+04	1.229	8,14	9973	16,22
1,00E+05	9.592	10,43	99991	20,85
1,00E+06	78.498	12,74	999983	25,48
1,00E+07	664.579	15,05	9999991	30,09
1,00E+08	5.761.455	17,36	99999989	34,71
1,00E+09	50.847.534	19,67	999999937	39,33
1,00E+10	455.025.509	21,98	9999999967	43,95
1,00E+11	4.124.599.869	24,24	99999999977	48,49
1,00E+12	37.668.527.415	26,55	999999999989	53,09
1,00E+13	346.621.096.885	28,85	9999999999763	57,70
1,00E+14	3.210.012.022.164	31,15	99999999999973	62,31
1,00E+15	29.890.794.226.982	33,46	999999999999989	66,91

Tabla No. 8. Comparación separación promedio Δ_p con la separación promedio si $p_2=p_1+\Delta_m$.

Vemos como la separación promedio se incrementa al doble si $p_2=p_1+\Delta_m$ lo cual sería una contradicción, por lo tanto la separación entre p_1 y p_2 debe ser alrededor de $\Delta_p \approx 12,74+n\ln 10$ que es un valor muy pequeño comparado con el valor de p_1, que se va incrementando aproximadamente por **10** cada vez que incremento a x por **10**, luego es imposible que $p_2=p_1+\Delta_m$ debido a la uniformidad del crecimiento de Δ_p. Si el incremento se revirtiese en números cercanos al infinito, es decir fuese menor el incremento de p_1 con respecto al incremento de separación promedio de los números primos, sería la única posibilidad, pero ya conocemos que el teorema de los números primos ha sido demostrado y por consiguiente esa posibilidad no existe.

Comprobación matemática:

$$\Delta_p=\frac{x}{p(x)} \qquad (16)$$

Cuando $p_1=x$

$$\Delta_{p_1}=\frac{p_1}{p(p_1)} \approx 12{,}739+lnp_1 \text{ para } x \text{ muy grande} \qquad (17)$$

Cuando $p_2=p_1+\Delta_m \approx 2p_1$ para p_1 muy grande y $p_{(p_2)}=p_{p_1}+1$ la ecuación 15 quedaría:

$\Delta_{p_2}=\frac{p_2}{p(p_2)}=\frac{p_2}{p(p_1)+1} \approx \frac{2p_1}{p(p_1)+1} \approx 2\Delta_{p_1}$, es decir es aproximadamente el doble.

Lo anterior lo comprobamos físicamente con la tabla 10, donde vemos como incluyendo el numero primo real p_2 después de x, la separación promedio de los números primos se mantiene en $\Delta_p \approx 12{,}74+nln10$, lo cual nos indica que no puede existir una variación del doble de Δ_p entre dos primos seguidos y menos cuando x es muy grande. **Sería una contradicción al teorema de los números primos**.

x	Separación promedio hasta x	Último primo antes de x	Separación promedio con $p2=p1+\Delta_m$	Primer primo después de x	Separación promedio con p2 real
1,00E+01	2,50	7	2,60	11	2,20
1,00E+02	4,00	97	7,42	101	3,88
1,00E+03	5,95	997	11,79	1009	5,97
1,00E+04	8,14	9973	16,22	10007	8,14
1,00E+05	10,43	99991	20,85	100003	10,42
1,00E+06	12,74	999983	25,48	1000003	12,74
1,00E+07	15,05	9999991	30,09	10000019	15,05
1,00E+08	17,36	99999989	34,71	100000007	17,36
1,00E+09	19,67	999999937	39,33	1000000007	19,67
1,00E+10	21,98	9999999967	43,95	10000000019	21,98
1,00E+11	24,24	99999999977	48,49	100000000003	24,24
1,00E+12	26,55	999999999989	53,09	1000000000061	26,55
1,00E+13	28,85	9999999999763	57,70	10000000000037	28,85
1,00E+14	31,15	99999999999973	62,31	100000000000031	31,15
1,00E+15	33,46	999999999999989	66,91	1000000000000037	33,46

Tabla No. 10. Comparación separación promedio hasta x, $p_2=p_1+\Delta_m$ y p_2 real.

En conclusión el teorema de los números primos demuestra también la conjetura fuerte de **Golbach,** y por ende la conjetura débil de **Goldbach** quedaría también demostrada.

La conjetura débil de **Goldbach** dice:

"Todo número impar mayor que 7 puede expresarse como suma de tres números primos impares".

Ahora bien al quedar demostrada la conjetura fuerte de Goldbach, es lógico que la débil queda demostrada, ya que todo número par más 3 es impar y como todo número par puede ser representado por dos primos, al agregarle 3 que es primo, tendríamos tres primos.

Algunos ejemplos:

1. Si entre 11 (primo) y 24 no hubiesen primos, 24 no podría ser representado por la suma de 2 primos (24=2*11+2), como hay primos (13, 17, 19 y 23) total 4 primos, tenemos:
   24=11+13=17+7=19+5.
   Es decir hay 3 posibilidades de encontrar 24.
2. Otro ejemplo: Si entre 101 (primo) y 204 no hubiesen primos, 204 no podría ser representado por la suma de 2 primos (104=2*101+2), como hay primos (103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, y 199) total 20 primos, tenemos:
   204=103+101=107+97=131+73=137+67=151+53=157+47=163+41=167 +37=173+31=181+23=191+13=193+11=197+7=199+5.
   Es decir hay 14 posibilidades de encontrar 204.
3. Tercer ejemplo: Si entre 1.009 (primo) y 2.020 no hubiesen primos, 2.020 no podría ser representado por la suma de 2 primos (2.020=1.009*2+2), como hay primos (1.013, 1.019, 1.021, 1.031, 1.033, 1.039, 1.049, 1.051, 1.061, 1.063, 1.069, 1.087, 1.091, 1.093, 1.097, 1.103, 1.107, 1.119, 1.123, 1.129, 1.151, 1.153, 1.163, 1.171, 1.181, 1.187, 1.193, 1.201, 1.213,1.217, 1.223, 1.229, 1.231, 1.237, 1.249, 1259, 1.277, 1.279, 1.283, 1.289, 1.291, 1.297, 1.301, 1.303, 1.307, 1.319, 1.321, 1.327, 1.361, 1.367, 1.373, 1.381, 1.399, 1.409, 1.423, 1.427, 1.429, 1.433, 1.439, 1.447, 1.451, 1.453, 1.459, 1.471, 1.481, 1.483, 1.487, 1.489, 1.493, 1.499, 1.511, 1.523, 1.531, 1.543, 1.549, 1.553, 1.559, 1.567, 1.571, 1.579, 1.583, 1.597, 1.601, 1.607, 1.609, 1.613, 1.619, 1.621, 1.627, 1.637, 1.657, 1.663, 1.667, 1.669, 1.693, 1.697, 1.699, 1.709, 1.721, 1.723, 1.733, 1.741, 1.747, 1.753, 1.759, 1.777, 1.783, 1.787, 1.789, 1.801, 1.811, 1.823, 1.831, 1.847, 1.861, 1.867, 1.871, 1.873, 1.877, 1.879, 1.889, 1.901, 1.907, 1.913, 1.931, 1.933, 1.949, 1.951, 1.973, 1.979, 1.987, 1.993, 1.997, 1.999, 2.011, 2.017) total 136 primos tenemos:
   2.020=1.049+971=1.091+929=1.109+911=1.163+857=1.181+839=1.193 +827=1.223+797=1.259+761=1.277+743=1.301+719=1.319+701=1.361 +659=1.367+653=1.373+647=1.427+593=1.433+587=1.451+569=1.499 +521=1.511+509=1.553+467=1.559+461=1.571+449=1.601+419=1.619 +401=1.637+383=1.667+353=1.709+311=1.373+647=1.787+233=1.823

+197=1.847+173=1.871+149=1.889+131=1.907+113=1.913+107=1.931
+89=1.949+71=1.973+47=1.979+41=1.997+23=2.017+3
Es decir hay 41 posibilidades de encontrar 2.020.

Vemos como las posibilidades de combinaciones van aumentando, con el incremento de $\boldsymbol{x}$. La razón: el incremento de $\boldsymbol{p_1}$ es mayor (aproximadamente 10 veces cada vez que incrementamos a $\boldsymbol{x}$ 10 veces), con relación al incremento de la separación promedio de los números primos que es $\boldsymbol{ln10}$, por lo tanto tenemos más posibilidades de combinaciones de primos, para encontrar el respectivo número par con el incremento de $\boldsymbol{p_1}$ y $\boldsymbol{x}$, y la posibilidad de no encontrarlo será cero, debido a que $\boldsymbol{\Delta p} \ll \boldsymbol{p_1}$.

Comprobemos matemáticamente y desde el punto de vista de combinaciones como se van incrementando estas combinaciones de dos primos para encontrar un número par a medida que el número par es mayor:

Si $\boldsymbol{x}$ es par, hay $\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{4}}$ formas de expresarlo como la suma de dos números impares y $\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{4}}$ formas de expresarlo como la suma de dos números pares. Ejemplo 20 puede ser expresado por (20=19+1=17+3=15+5=13+7=11+9 total 5 formas de combinar números impares) o (20=18+2=16+4=14+6=12+8=10+10 total 5 formas de combinar números pares).

Ya vimos que **el teorema de los números primos** establece que la cantidad de números primos menores a $\boldsymbol{x}$ para $\boldsymbol{x}$ muy grandes es:
$\boldsymbol{p(x)} \approx \frac{x}{\ln x}$, haciendo $\boldsymbol{x = 2p_1 + 2}$, $\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{p_1 + 1}$ por lo tanto la cantidad de números primos menores o iguales a $\boldsymbol{p_1}$ sería $\boldsymbol{p(p_1)} \approx \frac{x}{2\ln\frac{x}{2}}$ y para $\boldsymbol{2p_1+2}$ sería
$\boldsymbol{p(2p_1+2)} \approx \frac{x}{\ln x}$
y la cantidad de números primos entre $\boldsymbol{p_1}$ y $\boldsymbol{2p_1+2}$ sería:
$\boldsymbol{p(2p_1+2)} - \boldsymbol{p(p_1+1)} = \frac{x}{\ln x} - \frac{x}{2\ln\frac{x}{2}}$
Cada uno de los números primos entre $\boldsymbol{p_1}$ y $\boldsymbol{2p_1+2}$ tiene una pareja impar que puede ser primo o no entre los números impares$\leq \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{2}}$ que cumpla que al sumarse a ese número primo de $\boldsymbol{2p_1+2}$.

Como la cantidad de números impares en $\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{2}}$ es $\frac{x}{4}$, la proporción de números primos sería:
$\boldsymbol{p(x/2)/(x/4)} = \frac{\frac{x/2}{\ln(x/2)}}{x/4} = \frac{2}{\ln(x/2)}$
Como sabemos la cantidad de números primos que hay entre $\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{2}}$ y $\boldsymbol{x}$ podemos saber cuántas combinaciones ($\boldsymbol{c(x)}$) podrían hacerse con estos primos y la proporción de primos menores a $\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{2}}$ que podrían dar $\boldsymbol{x}$ al sumarse los dos primos:
$$\boldsymbol{c(x)} = \left(\frac{x}{\ln x} - \frac{x}{2\ln\frac{x}{2}}\right)\left(\frac{2}{\ln(x/2)}\right) \qquad (18)$$

Esta ecuación nos da un cálculo aproximado del número de combinaciones que tenemos para encontrar a x como la suma de dos primos, la cual ha sido comprobada con la siguiente tabla:

x	*Primos<x*	*Primos≤x/2*	*x<primos≥x/2*	*c(x) real*	*c(x) calculada*
10	4	3	2	2	2
20	8	4	4	2	3
30	10	6	4	3	3
40	12	8	4	3	3
80	22	12	10	4	5
100	25	15	10	6	5
200	46	25	21	8	9
400	78	46	32	14	12
800	140	78	62	21	21
1.000	168	95	73	28	23
2.000	303	168	135	38	39
4.000	550	303	247	65	65
10.000	1.229	669	560	126	131

Tabla No. 10 Comparación posibilidades reales de que x par sea igual a la suma de dos primos con el cálculo de $c(x)$.

El siguiente gráfico muestra ese comportamiento (datos tomados de la tabla No. 10).

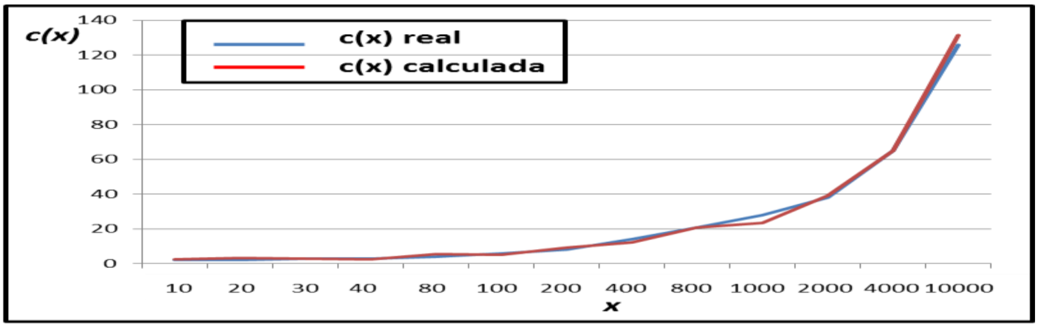

Gráfico No. 1. Comparación de ***c(x) calculada*** Vs. ***c(x) real*** con datos de la tabla No. 10.

Aquí es importante resaltar el factor $0,956<\frac{p(x)}{x/\ln x}<1,045$ demostrado por Sylvester ya que este es el error aproximado que se tiene para calcular a $p(x)=x/\ln x$, por lo tanto la función $c(x)$ también tiene una desviación en el cálculo de la exactitud del número de combinaciones, al aplicarse simplemente $p(x)=x/\ln x$. Entonces en algunos casos $c(x)$ calculada es menor, es igual o es mayor que $c(x)$ real, por la desviación dada por $0,956<\frac{p(x)}{x/\ln x}<1,045$.

Podemos deducir fácilmente que los límites de la ecuación 18 serían:

$0,956^2 \leq \frac{c(x)calculada}{c(x)real} \leq 1,045^2$, es decir:

$$0{,}913936 \leq \frac{c(x)calculada}{c(x)real} \leq 1{,}099025 \qquad (19)$$

Gráficamente lo mostramos en la siguiente figura:

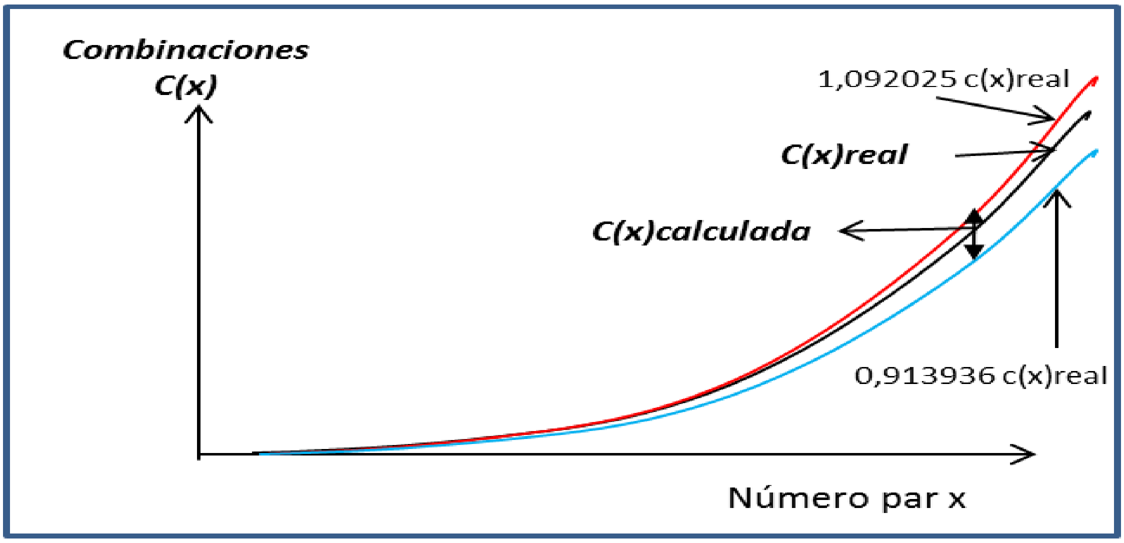

Gráfico No. 2 Representación gráfica de las ecuaciones 18 y 19.

Ahora bien, la función $c(x)$, es una función creciente, por lo tanto las posibilidades de combinaciones de dos primos para que den un número par son mayores con el incremento de x, miremos:

$$\lim_{x\to\infty} c(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{ln\,x} - \frac{x}{2ln\,\frac{x}{2}}\right)\left(\frac{2}{ln\,\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \frac{2x}{(\ln x)(\ln\frac{1}{2} + \ln x)} - \frac{x}{(\ln\frac{1}{2} + \ln x)^2}$$

$lim_{x\to\infty}\, c(x) = lim_{x\to\infty} \frac{x}{(ln\,x)^2} = \infty$ (eliminando $ln½$ que es muy pequeño cuando $x\to\infty$). Siendo $c(x)$ también una función continua y divergente al no tener límites.

De esta forma se comprueba en forma real la conjetura de **Goldbach**.

El anexo "A" muestra las tablas de los cálculos reales de $c(x)$.

Antes de pasar a las conclusiones, había prometido dar la razón por la cual no pueden existir otras cuartetas de números primos terminados en 1,3,7 y 9 en forma consecutiva, esto es porque el incremento de separación de los números primos va aumentando a medida que crece x, por lo tanto si existiesen cuartetas de primos de este tipo, no cumplirían el teorema de los números primos, porque su separación sería en este caso mucho más pequeña que Δ_p.

CONCLUSIÓN

Siempre existen posibilidades de demostrar lo que parece imposible.

En general las conjeturas nos han permitido lograr grandes avances en las ciencias donde se originan, el reto a la mente humana para que explore posibilidades y busque soluciones comienza desde el mismo momento que se crea dicha conjetura, pueden tardarse muchos años o siglos, al final alguien lo logra con creatividad y belleza. Qué es lo importante?: “no desfallecer porque no se logre inicialmente”.

Vicealmirante ® José William Porras Ferreira
Email: jwporras@balzola.org

BIBLIOGRAFIA

1. DiAmOnD (2008). «¡¡Tenemos dos nuevos primos de Mersenne!!».

2. Dunham William. *"El universo de las matemáticas".* Edicciones Pirámide, S. A.

3. Goldfeld Dorian. «The elementary proof of the prime number theorem:An historical perspective» p 1-14

4. GIMPS (200). “47th Known Mersenne Prime Found”

5. http://es.wikipedia.org/wiki/Libre_de_cuadrados

6. http://es.wikipedia.org/wiki/Números_primos_gemelos.

7. http://gaussianos.com/%C2%BFquien-no-tiene-una-demostracion-de-la-conjetura-de-goldbach/

8. Jeri Bao Carlos Roberto. Email: jcarlos_roberto@hotmail.com

9. J.J. Sylvester, On Tchebycheff ’s theorem of the totality of prime numbers comprised within given limits, Amer. J. Math. 4 (1881), p 230–247.

10. José Manuel Sánchez Muñoz “Historia de Matemáticas Riemann y los números primos” Revista de investigación pensamiento matemático. 1 de octubre de 2011 p 15-16

11. Pina i Estany Carles (2005). «Curiosidades sobre números primos.».

12. Von Koch, Helge (1901). “Sur la distribution des nombres premiers”. SpringerLink

13. Weisstein, Eric W. «Goldbach's conjecture». *MathWorld*. Wolfram Research

14. Wikipedia la encyclopedia libre: “Teorema de los números primos”.

ANEXO A
TABLA COMBINACIONES DE LA SUMA DE DOS PRIMOS IGUALES A UN NUMERO PAR

x	***Combinaciones de primos***								***c(x) real***
10	7+3	5+5							2
20	17+3	13+7							2
30	23+7	19+11	17+13						3
40	23+17	29+11	37+3						3
80	73+7	67+13	61+19	43+37					4
100	97+3	89+11	83+17	71+29	59+41	53+47			6
200	197+3	193+7	181+19	163+37	157+43	139+61	127+73	103+97	8
400	397+3	389+11	383+17	359+41	353+47	347+53	317+83	311+89	
	293+107	269+131	263+137	251+149	233+167	227+173			14
800	797+3	787+13	769+31	757+43	739+61	733+67	727+73	691+109	
	673+127	661+139	643+157	619+181	607+193	601+199	577+223	571+229	
	523+277	487+313	463+337	433+367	421+379				21
1000	997+3	983+17	977+23	971+29	953+47	947+53	941+59	929+71	
	911+89	887+113	863+137	827+173	821+179	809+191	773+227	761+239	
	743+257	719+281	683+317	653+347	647+353	641+359	617+383	599+401	
	569+431	557+443	521+479	509+491					28
2000	1009+991	1033+967	1063+937	1093+907	1117+883	1123+877	1171+829	1213+787	
	1231+769	1249+751	1291+709	1327+673	1381+619	1399+601	1423+577	1429+571	
	1453+547	1459+541	1543+457	1567+433	1579+421	1607+397	1621+379	1627+373	
	1663+337	1669+331	1693+307	1723+277	1759+241	1777+223	1789+211	1801+199	
	1861+139	1873+127	1933+67	1987+13	1993+7	1997+3			38
4000	3989+11	3947+53	3929+71	3917+83	3911+89	3863+137	3851+149	3833+167	
	3821+179	3803+197	3767+233	3767+233	3761+239	3719+281	3617+383	3581+419	
	3557+443	3589+461	3533+467	3491+509	3413+587	3407+593	3359+641	3347+653	
	3323+677	3299+701	3257+743	3203+797	3191+809	3137+863	3119+881	3089+911	
	3023+977	2999+1031	2939+1061	2909+1091	2903+1097	2897+1103	2837+1163	2819+1181	
	2813+1187	2777+1223	2741+1259	2711+1289	2699+1301	2633+1367	2591+1409	2477+1523	
	2447+1553	2441+1559	2417+1583	2399+1601	2393+1607	2381+1619	2333+1667	2267+1733	
	2213+1783	2153+1847	2129+1871	2111+1889	2099+1901	2087+1913	2069+1931	2027+1973	
	2003+1997								65
10000	9941+59	9929+71	9887+113	9851+149	9833+167	9803+197	9767+233	9749+251	
	9743+257	9719+281	9689+311	9551+449	9539+461	9533+467	9521+479	9497+503	
	9491+509	9479+521	9437+563	9431+569	9413+587	9341+559	9323+677	9281+719	
	9257+743	9239+761	9227+773	9203+797	9173+827	9161+839	9137+863	9059+941	
	9029+971	8969+1031	8951+1049	8849+1151	8837+1163	8819+1181	8807+1193	8783+1217	
	8741+1259	8699+1301	8693+1307	8681+1319	8627+1373	8573+1427	8513+1487	8501+1499	
	8447+1553	8429+1571	8387+1613	8363+1637	8291+1709	8111+1889	8123+1877	8093+1907	
	8087+1913	8069+1931	7937+2063	7919+2081	7901+2099	7793+2207	7757+2243	7727+2273	
	7703+2297	7649+2351	7643+2357	7607+2393	7589+2411	7583+2417	7577+2423	7559+2441	

	7541+2459	7523+2477	7457+2543	7451+2549	7307+2693	7247+2753	7211+2789	7121+2879	
	7103+2897	7043+2957	7001+2999	6977+3023	6959+3041	6917+3083	6911+3089	6863+3137	
	6833+3167	6791+3209	6779+3221	6701+3299	6653+3347	6551+3449	6473+3527	6329+3671	
	6323+3677	6299+3701	6221+3779	6203+3797	6197+3803	6089+3911	6053+3947	6011+3989	
	5981+4019	5987+4013	5927+4073	5867+4133	5861+4139	5643+4157	5783+4217	5741+4259	
	5717+4283	5711+4289	5651+4349	5591+4409	5519+4481	5507+4493	5483+4517	5477+4523	
	5417+4583	5351+4649	5309+4691	5297+4703	5279+4721	5081+4919			126

ANEXO B
LISTA DE NÚMEROS PRIMOS $\leq$ 10000

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541
547	557	563	569	571	577	587	593	599	601
607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733
739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863
877	881	883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997	1009	1013
1019	1021	1031	1033	1039	1049	1051	1061	1063	1069
1087	1091	1093	1097	1103	1109	1117	1123	1129	1151
1153	1163	1171	1181	1187	1193	1201	1213	1217	1223
1229	1231	1237	1249	1259	1277	1279	1283	1289	1291
1297	1301	1303	1307	1319	1321	1327	1361	1367	1373
1381	1399	1409	1423	1427	1429	1433	1439	1447	1451
1453	1459	1471	1481	1483	1487	1489	1493	1499	1511
1523	1531	1543	1549	1553	1559	1567	1571	1579	1583
1597	1601	1607	1609	1613	1619	1621	1627	1637	1657
1663	1667	1669	1693	1697	1699	1709	1721	1723	1733

1741	1747	1753	1759	1777	1783	1787	1789	1801	1811
1823	1831	1847	1861	1867	1871	1873	1877	1879	1889
1901	1907	1913	1931	1933	1949	1951	1973	1979	1987
1993	1997	1999	2003	2011	2017	2027	2029	2039	2053
2063	2069	2081	2083	2087	2089	2099	2111	2113	2129
2131	2137	2141	2143	2153	2161	2179	2203	2207	2213
2221	2237	2239	2243	2251	2267	2269	2273	2281	2287
2293	2297	2309	2311	2333	2339	2341	2347	2351	2357
2371	2377	2381	2383	2389	2393	2399	2411	2417	2423
2437	2441	2447	2459	2467	2473	2477	2503	2521	2531
2539	2543	2549	2551	2557	2579	2591	2593	2609	2617
2621	2633	2647	2657	2659	2663	2671	2677	2683	2687
2689	2693	2699	2707	2711	2713	2719	2729	2731	2741
2749	2753	2767	2777	2789	2791	2797	2801	2803	2819
2833	2837	2843	2851	2857	2861	2879	2887	2897	2903
2909	2917	2927	2939	2953	2957	2963	2969	2971	2999
3001	3011	3019	3023	3037	3041	3049	3061	3067	3079
3083	3089	3109	3119	3121	3137	3163	3167	3169	3181
3187	3191	3203	3209	3217	3221	3229	3251	3253	3257
3259	3271	3299	3301	3307	3313	3319	3323	3329	3331
3343	3347	3359	3361	3371	3373	3389	3391	3407	3413
3433	3449	3457	3461	3463	3467	3469	3491	3499	3511
3517	3527	3529	3533	3539	3541	3547	3557	3559	3571
3581	3583	3593	3607	3613	3617	3623	3631	3637	3643
3659	3671	3673	3677	3691	3697	3701	3709	3719	3727
3733	3739	3761	3767	3769	3779	3793	3797	3803	3821
3823	3833	3847	3851	3853	3863	3877	3881	3889	3907
3911	3917	3919	3923	3929	3931	3943	3947	3967	3989
4001	4003	4007	4013	4019	4021	4027	4049	4051	4057
4073	4079	4091	4093	4099	4111	4127	4129	4133	4139
4153	4157	4159	4177	4201	4211	4217	4219	4229	4231
4241	4243	4253	4259	4261	4271	4273	4283	4289	4297
4327	4337	4339	4349	4357	4363	4373	4391	4397	4409
4421	4423	4441	4447	4451	4457	4463	4481	4483	4493
4507	4513	4517	4519	4523	4547	4549	4561	4567	4583
4591	4597	4603	4621	4637	4639	4643	4649	4651	4657
4663	4673	4679	4691	4703	4721	4723	4729	4733	4751
4759	4783	4787	4789	4793	4799	4801	4813	4817	4831
4861	4871	4877	4889	4903	4909	4919	4931	4933	4937

4943	4951	4957	4967	4969	4973	4987	4993	4999	5003
5009	5011	5021	5023	5039	5051	5059	5077	5081	5087
5099	5101	5107	5113	5119	5147	5153	5167	5171	5179
5189	5197	5209	5227	5231	5233	5237	5261	5273	5279
5281	5297	5303	5309	5323	5333	5347	5351	5381	5387
5393	5399	5407	5413	5417	5419	5431	5437	5441	5443
5449	5471	5477	5479	5483	5501	5503	5507	5519	5521
5527	5531	5557	5563	5569	5573	5581	5591	5623	5639
5641	5647	5651	5653	5657	5659	5669	5683	5689	5693
5701	5711	5717	5737	5741	5743	5749	5779	5783	5791
5801	5807	5813	5821	5827	5839	5843	5849	5851	5857
5861	5867	5869	5879	5881	5897	5903	5923	5927	5939
5953	5981	5987	6007	6011	6029	6037	6043	6047	6053
6067	6073	6079	6089	6091	6101	6113	6121	6131	6133
6143	6151	6163	6173	6197	6199	6203	6211	6217	6221
6229	6247	6257	6263	6269	6271	6277	6287	6299	6301
6311	6317	6323	6329	6337	6343	6353	6359	6361	6367
6373	6379	6389	6397	6421	6427	6449	6451	6469	6473
6481	6491	6521	6529	6547	6551	6553	6563	6569	6571
6577	6581	6599	6607	6619	6637	6653	6659	6661	6673
6679	6689	6691	6701	6703	6709	6719	6733	6737	6761
6763	6779	6781	6791	6793	6803	6823	6827	6829	6833
6841	6857	6863	6869	6871	6883	6899	6907	6911	6917
6947	6949	6959	6961	6967	6971	6977	6983	6991	6997
7001	7013	7019	7027	7039	7043	7057	7069	7079	7103
7109	7121	7127	7129	7151	7159	7177	7187	7193	7207
7211	7213	7219	7229	7237	7243	7247	7253	7283	7297
7307	7309	7321	7331	7333	7349	7351	7369	7393	7411
7417	7433	7451	7457	7459	7477	7481	7487	7489	7499
7507	7517	7523	7529	7537	7541	7547	7549	7559	7561
7573	7577	7583	7589	7591	7603	7607	7621	7639	7643
7649	7669	7673	7681	7687	7691	7699	7703	7717	7723
7727	7741	7753	7757	7759	7789	7793	7817	7823	7829
7841	7853	7867	7873	7877	7879	7883	7901	7907	7919
7927	7933	7937	7949	7951	7963	7993	8009	8011	8017
8039	8053	8059	8069	8081	8087	8089	8093	8101	8111
8117	8123	8147	8161	8167	8171	8179	8191	8209	8219
8221	8231	8233	8237	8243	8263	8269	8273	8287	8291
8293	8297	8311	8317	8329	8353	8363	8369	8377	8387

8389	8419	8423	8429	8431	8443	8447	8461	8467	8501
8513	8521	8527	8537	8539	8543	8563	8573	8581	8597
8599	8609	8623	8627	8629	8641	8647	8663	8669	8677
8681	8689	8693	8699	8707	8713	8719	8731	8737	8741
8747	8753	8761	8779	8783	8803	8807	8819	8821	8831
8837	8839	8849	8861	8863	8867	8887	8893	8923	8929
8933	8941	8951	8963	8969	8971	8999	9001	9007	9011
9013	9029	9041	9043	9049	9059	9067	9091	9103	9109
9127	9133	9137	9151	9157	9161	9173	9181	9187	9199
9203	9209	9221	9227	9239	9241	9257	9277	9281	9283
9293	9311	9319	9323	9337	9341	9343	9349	9371	9377
9391	9397	9403	9413	9419	9421	9431	9433	9437	9439
9461	9463	9467	9473	9479	9491	9497	9511	9521	9533
9539	9547	9551	9587	9601	9613	9619	9623	9629	9631
9643	9649	9661	9677	9679	9689	9697	9719	9721	9733
9739	9743	9749	9767	9769	9781	9787	9791	9803	9811
9817	9829	9833	9839	9851	9857	9859	9871	9883	9887
9901	9907	9923	9929	9931	9941	9949	9967	9973	